

GARA INDIVIDUALE DI MATEMATICA

28 aprile 2014, Sapienza Università di Roma.

Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Con il sostegno di: Unione Matematica Italiana, Progetto Lauree Scientifiche.

Salvo avviso contrario, ogni esercizio fornisce un punteggio compreso tra 0 e 10 punti.

1. Vado al massimo (1 ora)

Per ogni intero $n \geq 3$ determinare, in funzione di n , il massimo comune divisore di $n^3 - n^2 - 2n$ e $n^2 + n + 1$.

2. Le strane coppie (1 ora)

Determinare tutte le coppie (a, b) di interi positivi con $a \geq b$, $a^2 \neq 2b$ e tali che il numero

$$\frac{b^2 + 2a}{a^2 - 2b}$$

sia ancora intero.

3. Dopo il terzo non sbaglio un colpo (2 ore)

Si consideri la successione a_n , $n \geq 1$, definita da $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}$ per $n \geq 1$. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 4$ si ha

$$n < a_n^2 < n + 1.$$

(Nota: siano c, d costanti positive; la dimostrazione di $n - c < a_n^2 < n + 1 + d$ per ogni $n \geq 4$ sarà valutata con un punteggio compreso tra 0 e $\max(2, 10 - 3c - 3d)$ punti.)

4. Scherzi dell'infinito? (2 ore)

Costruire, o dimostrare che non esistono, due successioni (a_n) , (b_n) , $n > 0$, di numeri razionali positivi tali che:

1. $a_{n+1} \leq a_n$ e $b_{n+1} \leq b_n$ per ogni n ;
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n) < 10$;
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$.

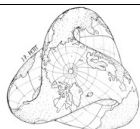
(Nota: la seconda condizione significa che per ogni intero N si ha $\sum_{n=1}^N \min(a_n, b_n) < 10$, mentre la terza significa che per ogni $C > 0$ esiste un intero M tale che $\sum_{n=1}^M a_n > C$, $\sum_{n=1}^M b_n > C$.)

5. Montagne russe binomiali (2 ore)

Per ogni intero positivo $n > 0$ indichiamo con $[n/5]$ la parte intera di $n/5$. Per quali valori di n il numero

$$\sum_{k=0}^{[n/5]} (-1)^k \binom{n}{5k} = \sum_{k=0}^{[n/5]} (-1)^k \frac{n!}{(5k)!(n-5k)!}$$

è divisibile per 5?



PROGETTO OLIMPIADI
SEZIONE DI ROMA

Progetto Olimpiadi della Matematica
Sezione di Roma

www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi

