Roma, 5 marzo 2014

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1. Anna, Bruno, Carla, Dario, Elena e Franco vanno al cinema a vedere la versione restaurata di "Guerre Stellari" e riempiono le posizioni da 1 a 6 della fila 17. Sapendo che Anna si siede vicino a Carla e che non vi sono due maschi seduti uno accanto all'altro, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente falsa?

(A) Anna è seduta al posto 2
(B) Bruno è seduto al posto 3
(C) Carla è seduta al posto 4
(D) Dario è seduto al posto 4
(E) Elena è seduta al posto 3
(F) Franco è seduto al posto 6

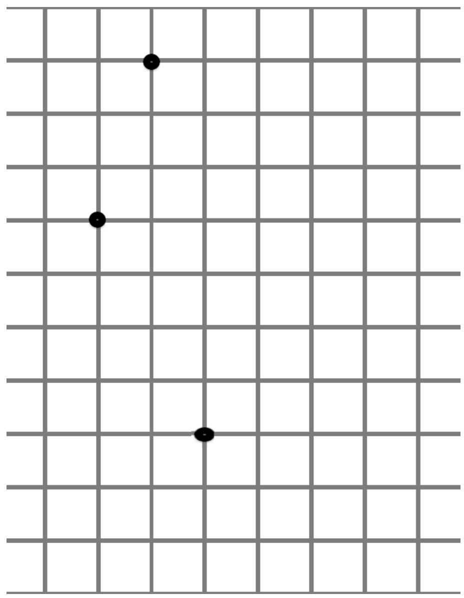
Quesito 2. Luke Skywalker per prepararsi all'attacco alla "Morte Nera" percorre con il suo T-65 X-Wing Starfighter tre orbite intorno al Pianeta Tatooine. Sapendo che la prima orbita è percorsa a una velocità media di 100 km/s, la seconda a 200 km/s e la terza a 300 km/s, qual è la velocità media sul totale dei tre giri?

(A) 200 km/s
(B) 1800/11 km/s
(C) $\sqrt[3]{6} \cdot 100$ km/s
(D) 150 km/s
(E) 225 km/s
(F) 1900/13 km/s

Quesito 3. Ian Solo e Chewbecca arrivano alla Cantina di Mos Eisly e dopo un paio di bicchieri decidono di sedersi a un tavolo dove alcuni alieni e umanoidi stanno giocando a carte. Nel gioco che fanno a ogni mano ciascun giocatore mette nel piatto una cifra fissata (la posta), e il vincitore (unico) alla fine si prende tutto. Ian, dopo una interminabile serata in cui vengono giocate un numero primo p di mani, si accorge di ritrovarsi esattamente gli stessi soldi che aveva all'inizio. Sapendo che la posta è stata sempre la stessa a ogni mano e che nessuno si è mai alzato dal tavolo da gioco saltando un turno (cioè tutti hanno giocato tutte le partite), sapreste dire in quanti erano a giocare quella sera a quel tavolo?

(A) $2p$
(B) $p-1$
(C) $\frac{p+1}{2}$
(D) p
(E) p^2
(F) impossibile dirlo

Quesito 4. Si considerino i punti disegnati in figura. Qual è il raggio del cerchio che passa per i 3 punti, supponendo che il lato di ogni quadretto misura 1?



(A) 4.5
(B) 3.1415...
(C) 4
(D) 5
(E) 6
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 5. Come è noto, le coordinate geografiche del porto spaziale di Mos Eisley sono 60°N e 10°30′E, mentre quelle del palazzo di Jabba he Hutt sono 60°N e 30°30′E. Approssimando la superficie di Tatooine con quella di una sfera di raggio R = 6.378,3 Km, quanti chilometri devono percorrere C1P8 e D3B0 per andare dal porto spaziale al palazzo muovendosi in direzione Est sempre alla stessa latitudine? (Per π si usi il valore approssimato 3,14)

(A) 1.112,659
(B) 1.086,610
(C) 986,121
(D) 1.204,223
(E) 998,367
(F) 1.002,116

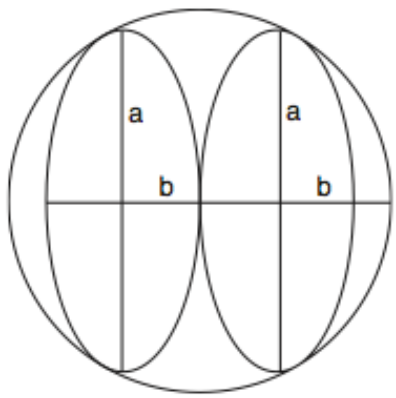
Quesito 6. Per quali valori del parametro reale a l'equazione

$$x^4 + ax^3 + 2(a-1)x^2 + ax + 1 = 0$$

ammette un'unica soluzione reale?

(A) $a = 0$
(B) a intero negativo
(C) $0 < a \leq 4$
(D) $a < -2$ e $a > 3$
(E) $a < -2$ e $a > 2$
(F) $a > 3$

Quesito 7. A causa di un guasto al reattore secondario, il Millennium Falcon è costretto a un atterraggio di fortuna sul pianeta Tatooine. La sezione del reattore, descritta in figura, ha la forma di due ellissi identiche di semiasse maggiore a inscritte in un cerchio di raggio R, in modo tale che siano tra loro tangenti, e siano tangenti da dentro al cerchio. Qual è il valore del semiasse minore b?



(A) $\sqrt{R^2 - a^2}$
(B) $a\sqrt{1 - a^2/R^2}$
(C) $\frac{3}{2}R - a$
(D) $R - a/2$
(E) $a(1 - a^2/R^2)$
(F) $a(1 - \sqrt{3}a/R)$

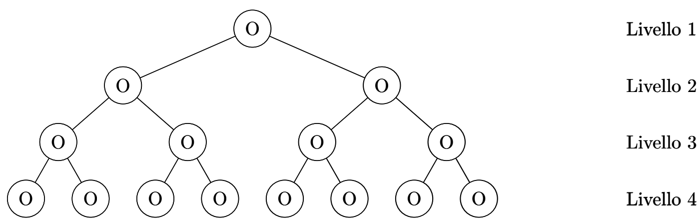
Quesito 8. Dopo aver lanciato il siluro a protoni, il caccia di Luke Skywalker si allontana dalla Morte Nera a velocità costante cercando di evitare il fuoco della contraerea. Misurando il tempo in secondi e indicando con $t = 0$ il momento in cui Luke lancia il siluro, sappiamo che la contraerea lancia un raggio laser ogni mezzo secondo, con inizio per $t = 1$ e che la probabilità cha ha il caccia di essere colpito dal raggio sparato al tempo t è uguale a $1/2t$. Dato che la Morte Nera si disintegra esattamente al tempo $t = 12,05$, che probabilità ha Luke Skywalker di rientrare illeso alla base?

(A) 1/12
(B) 1/23
(C) 1/24
(D) 1/48
(E) 1/49
(F) nessuna delle precedenti risposte è corretta

Quesito 9. Gerolamo, Pierre e Blaise possiedono un dado cubico ciascuno. Quello di Gerolamo ha sulle 6 facce i 6 numeri $(5, 5, 5, 4, 1, 1)$; quello di Pierre i numeri $(4, 4, 4, 3, 3, 1)$, e quello di Blaise $(6, 6, 2, 2, 2, 2)$. Ciascuno dei tre sfida gli altri due con N lanci. Ognuno lancia il proprio dado, e ad ogni lancio vince chi ottiene il numero più alto. Quale dei tre dadi converrebbe avere per vincere?

(A) il dado di Gerolamo
(B) il dado di Pierre
(C) il dado di Blaise
(D) è indifferente perché ogni dado è favorito su uno degli altri due, ma sfavorito sull'altro
(E) è indifferente perché nessun dado è avvantaggiato nel gioco
(F) dipende da N

Quesito 10. Luke e Leila debbono addobbare un albero di Natale binario completo con $N > 2$ "livelli" come in figura, mettendo una pallina in ciascun nodo O. Luke e Leila iniziano insieme, ma Luke e' tre volte piu' veloce nel sistemare le palline, e lascia a Leila l'addobbo di un solo sottoalbero (cioe' l'insieme dei nodi al di sotto di un nodo O fissato, piu' il nodo O stesso che e' la "punta del sottoalbero). Su quale livello cade la punta del sottoalbero di Leila, affinche' i due finiscano il più rapidamente possibile?
NB: Luke e Leila hanno un numero di palline sufficiente ad addobbare l'intero albero.



(A) $N-1$
(B) $2N-(log_2(2^N)-2)$
(C) $min(3,(log_2(2^{N-1})))$
(D) $N-\left[log_2(2^{N+1})\right]-1$
(E) 3
(F) $max(2, N-log_2(2^{N-1}))$

Quesito 11. Sul pianeta Kamino è in corso un addrestramento di cloni Trooper: 10 di essi sono disposti in cerchio, con gli sguardi verso il centro del cerchio. Ogni clone è armato di mitra contrassegnato con un numero da 1 a 10, ordinatamente assegnati in senso orario. Il mitra numero 1 è inizialmente nelle mani del clone tenente. L'addrestramento prevede che al segnale del tenente si operi la seguente manovra:
ogni clone carica e scarica il suo mitra, e lo passa al vicino alla sua destra, ricevendone uno dal vicino alla sua sinistra, inoltre, subito dopo, soltanto i due cloni che inizialmente erano in possesso dei mitra numerati con 3 e 4 si scambiano le armi tra loro.
Il tenente chiama il segnale ogni 3 secondi (orologio locale di Kamino). Dopo 5 minuti di addrestramento (un minuto è di 60 secondi kaminoani), qual è il numero del mitra che si trova tra le mani del tenente?

(A) 8
(B) 10
(C) 6
(D) 1
(E) 4
(F) 2

Quesito 12. Dati due interi positivi a, b, indichiamo con $C(a, b)$ quanti tra i seguenti numeri

$$a,\ 2a,\ \ldots,\ (b-1)a,\ ba,$$

sono divisibili per b. Quale tra le seguenti risposte è corretta ?

(A) $C(a, b) = C(b, a)$ e $C(a, b+1) \geq C(a, b)$ per ogni a, b
(B) $C(a, b) = C(b, a)$ e $C(a, b+a) \geq C(a, b)$ per ogni a, b
(C) $C(a, b) = C(b, a)$ e $C(a+1, b) \geq C(a, b+1)$ per ogni a, b
(D) $C(a, b+1) \geq C(a, b)$ e $C(a, b+a) \geq C(a, b)$ per ogni a, b
(E) $C(a, b+1) \geq C(a, b)$ e $C(a+1, b) \geq C(a, b+1)$ per ogni a, b
(F) nessuna delle precedenti risposte è corretta

Quesito 13. "Quoti? Guerra dei Quoti? Ma non vuol dire nulla!!!" Obi Wan è perplesso. I circuiti di C1-P8 sono di nuovo fuori posto e fa traduzioni senza senso.

Iniziamo con un semplice test aritmetico per capire dove sta il problema: qual è il più grande intero k tale che $85!$ è divisibile per 42^k ?

Quesito 14. Si scrivano tutti i numeri $1, 2, 3, \ldots, 10, 12, \ldots, 1000000$ compresi tra uno ed un milione che non sono multipli di 11 su un (enorme) foglio di carta; ora si sostituisca ogni numero della lista con la somma delle sue cifre, e così via, sostituendo in ogni somma ottenuta nuovamente la somma delle sue cifre, finché non si ottiene un numero costituito da una sola cifra. Qual è la cifra più frequente della nuova lista così ottenuta?

Quesito 15. Supponiamo che i numeri reali α e β soddisfino le equazioni

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1, \qquad \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5.$$

Si trovi quanto vale $\alpha + \beta$.