GARA INDIVIDUALE DI MATEMATICA

28 aprile 2014, Sapienza Università di Roma.

Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Con il sostegno di: Unione Matematica Italiana, Progetto Lauree Scientifiche.

1. Vado al massimo. *Per ogni intero $n \geq 3$ determinare, in funzione di n, il massimo comune divisore di $n^3 - n^2 - 2n$ e $n^2 + n + 1$.*

Denotiamo con $M_n = MCD(n^3 - n^2 - 2n, n^2 + n + 1)$. Eseguendo la divisione Euclidea troviamo le uguaglianze

$$n^3 - n^2 - 2n = (n^2 + n + 1)(n - 2) - (n - 2), \qquad n^2 + n + 1 = (n - 2)(n + 3) + 7,$$

dalle quali si ricava che M_n è uguale al massimo comune divisore di $n - 2$ e 7. Dunque $M_n = 7$ se $n \equiv 2 \pmod 7$ e $M_n = 1$ altrimenti.

2. Le strane coppie. *Determinare tutte le coppie (a, b) di interi positivi con $a \geq b$, $a^2 \neq 2b$ e tali che il numero $\dfrac{b^2 + 2a}{a^2 - 2b}$ sia ancora intero.*

Una soluzione è $a = b = 1$. Supponendo $a \geq 2$, numeratore e denominatore sono entrambi positivi e condizione necessaria affinché il quoziente sia intero è che $(b^2 + 2a) - (a^2 - 2b) \geq 0$. Scrivendo $a = b + c$ si ottiene

$$(b^2 + 2a) - (a^2 - 2b) = (b^2 + 2b + 2c) - (b^2 + 2bc + c^2 - 2b) = -c^2 + 2c(1 - b) + 4b\ .$$

Per il polinomio $p(x) = -x^2 + 2x(1 - b) + 4b$ vale

$$p(1) = 2b + 1 > 0, \qquad p(2) = 0, \qquad p(x) < 0 \text{ per ogni } x > 2\ .$$

Ne deduciamo che $c = 0, 1, 2$ e che, se $c = 2$, allora $\frac{b^2+2a}{a^2-2b} = 1$. Se $c = 0$, ossia $a = b \geq 2$ si ha

$$\frac{b^2 + 2a}{a^2 - 2b} = \frac{b^2 + 2b}{b^2 - 2b} = \frac{b + 2}{b - 2}$$

che può essere intero solo per $b = 3, 4, 6$. Se $c = 1$ si ha $\dfrac{b^2 + 2a}{a^2 - 2b} = \dfrac{b^2 + 2b + 2}{b^2 + 1}$ che risulta essere intero solo per $b = 2$. In conclusione le coppie che risolvono il problema sono:

$$(1, 1), (3, 3), (4, 4), (6, 6), (3, 2), \quad (b + 2, b) \quad b \geq 1\ .$$

3. Dopo il terzo non sbaglio un colpo. *Si consideri la successione a_n, $n \geq 1$, definita da $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + \dfrac{n}{a_n}$ per $n \geq 1$. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 4$ si ha $n < a_n^2 < n + 1$.*

Un semplice conto mostra che $4,5 = 4 + \frac{2}{4} < a_4^2 < 5$. Per il principio di induzione basta dimostrare che se $n \geq 4$ e

$$n + \frac{2}{n} < a_n^2 < n + 1,$$

allora vale

$$n + 1 + \frac{2}{n + 1} < a_{n+1}^2 < n + 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad n - 1 + \frac{2}{n + 1} < \frac{a_n^2}{n^2} + \frac{n^2}{a_n^2} < n\ .$$

Siccome per $n \geq 4$ si ha $1 < \frac{n^2}{n+1} \leq \frac{n^2}{a_n^2} \leq \frac{n^2}{n+2/n}$ e la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x} + x$ è crescente per $x \geq 1$, basta dimostrare le due disuguaglianze

$$n - 1 + \frac{2}{n + 1} < \frac{n + 1}{n^2} + \frac{n^2}{n + 1}, \qquad \frac{n + 2/n}{n^2} + \frac{n^2}{n + 2/n} < n\ .$$

Moltiplicando per $n + 1$ la prima disuguaglianza e per $n + 2/n$ la seconda troviamo

$$n^2 - 1 + 2 < \frac{(n + 1)^2}{n^2} + n^2, \qquad \frac{(n + 2/n)^2}{n^2} + n^2 < n^2 + 2,$$

che risultano verificate per ogni $n \geq 3$.

4. Scherzi dell'infinito? *Costruire, o dimostrare che non esistono, due successioni* (a_n), (b_n), $n > 0$, *di numeri razionali positivi tali che:*

1. $a_{n+1} \leq a_n$ *e* $b_{n+1} \leq b_n$ *per ogni* n*;*
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n) < 10$*;*
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$.

Restringendo l'attenzione alle successioni della forma

$$a_n = \frac{1}{2^{\alpha(n)}}, \qquad b_n = \frac{1}{2^{\beta(n)}}, \qquad \max(\alpha(n), \beta(n)) = n, \quad \alpha(n+1) \geq \alpha(n), \quad \beta(n+1) \geq \beta(n),$$

le prime due condizioni sono verificate. Se, ad esempio, poniamo per ogni $k \geq 0$

$$\alpha(n) = \begin{cases} n & \text{se } 2^{2k} \leq n < 2^{2k+1} \\ 2^{2k+1} & \text{se } 2^{2k+1} \leq n < 2^{2k+2} \end{cases} \qquad \beta(n) = \begin{cases} 2^{2k} & \text{se } 2^{2k} \leq n < 2^{2k+1} \\ n & \text{se } 2^{2k+1} \leq n < 2^{2k+2} \end{cases}$$

si ha, per ogni $k \geq 0$,

$$\sum_{n=2^{2k}}^{2^{2k+2}-1} a_n \geq \sum_{n=2^{2k+1}}^{2^{2k+2}-1} a_n = 1, \qquad \sum_{n=2^{2k}}^{2^{2k+2}-1} b_n \geq \sum_{n=2^{2k}}^{2^{2k+1}-1} b_n = 1 \, ,$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^{2k}}^{2^{2k+2}-1} a_n \geq \sum_{k=0}^{\infty} 1 = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=2^{2k}}^{2^{2k+2}-1} b_n \geq \sum_{k=0}^{\infty} 1 = +\infty \, .$$

5. Montagne russe binomiali. *Per ogni intero positivo* $n > 0$ *indichiamo con* $[n/5]$ *la parte intera di* $n/5$*. Per quali valori di* n *il numero*

$$A_n = \sum_{k=0}^{[n/5]} (-1)^k \binom{n}{5k} = \sum_{k=0}^{[n/5]} (-1)^k \frac{n!}{(5k)!(n-5k)!} \, .$$

è divisibile per 5*?*

Osserviamo immediatamente che $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$, $A_5 = 0$. Per ogni polinomio $p(x) = \sum_i a_i x^i$ indichiamo con

$$\{p(x)\} = \sum_j (-1)^j a_{5j}$$

la somma alterna dei coefficienti delle potenze di x multiple di 5; ad esempio $\{x^4 + 1\} = 1$, $\{x^5 + x\} = -1$. Notiamo che:

1. $\{p(x) + q(x)\} = \{p(x)\} + \{q(x)\}$;
2. $\{p(x)(x^5 + 1)\} = 0$;
3. $A_n = \{(1 + x)^n\}$.

Si deduce che A_n è uguale al termine noto del resto $r_n(x)$ della divisione Euclidea di $(1 + x)^n$ per $x^5 + 1$. I polinomi $r_n(x)$ possono essere calcolati ricorsivamente. Denotando

$$(1 + x)^n = q_n(x)(x^5 + 1) + r_n(x), \qquad r_n(x) = A_n + B_n x + C_n x^2 + D_n x^3 + E_n x^4$$

si ha $(1 + x)^{n+1} = q_n(x)(1 + x)(x^5 + 1) + r_n(x)(1 + x)$ e

$$r_n(x)(1 + x) = E_n(x^5 + 1) + (A_n - E_n) + (B_n + A_n)x + (C_n + B_n)x^2 + (D_n + C_n)x^3 + (E_n + D_n)x^4 \, .$$

Quindi

$$A_{n+1} = A_n - E_n, \quad B_{n+1} = B_n + A_n, \quad C_{n+1} = C_n + B_n, \quad D_{n+1} = D_n + C_n, \quad E_{n+1} = E_n + D_n \, .$$

Siccome $r_5(x) = (1 + x)^5 - (x^5 + 1) = 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4$ ne segue che tutti i coefficienti di $r_n(x)$, ed in particolare A_n, sono divisibili per 5 per ogni $n \geq 5$.

PROGETTO OLIMPIADI SEZIONE DI ROMA

Progetto Olimpiadi della Matematica
Sezione di Roma

www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi

Autori dei quesiti: Andrea Sambusetti (1,4), Marco Manetti (2,5), Claudia Malvenuto (3).