Roma, 5 marzo 2014

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

SOLUZIONI

Quesito 1. Risposta (E): Elena è seduta al posto 3.

Infatti, se Elena fosse al posto 3, allora Anna e Carla dovrebbero occupare i posti 1 e 2, oppure i posti 4 e 5, oppure i posti 5 e 6. È allora immediato osservare che in tutti e tre i casi vi sono almeno due maschietti seduti uno accanto all'altro.

Quesito 2. Risposta (B): 1800/11 km/s.

Indichiamo con L la lunghezza dell'orbita e con t_i il tempo impiegato per percorrere l'orbita all'i-esimo giro, da cui $t_i = L/(i \cdot 100)$. Allora la velocità media sul totale dei tre giri è data da

$$v = \frac{3L}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{3L}{\frac{L}{100} + \frac{L}{200} + \frac{L}{300}} = 1800/11 \text{ km/s}.$$

Quesito 3. Risposta (D): p.

Sia σ la posta e n il numero dei giocatori. Ian deve avere vinto (e perso) almeno una partita. Se ne ha vinta una sola, ha vinto $(n-1)\sigma$ e perso $(p-1)\sigma$. Per ritrovarsi la stessa cifra dovrà essere

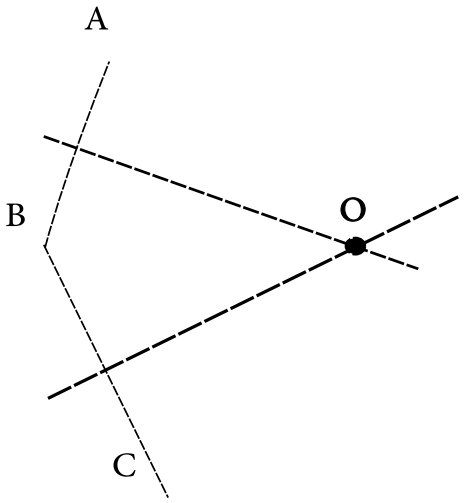
$$(n-1)\sigma = (p-1)\sigma, \text{ cioè } n = p.$$

D'altra parte se ne avesse vinte due, avrebbe vinto $2(n-1)\sigma$ e perso $(p-2)\sigma$, di modo che per ritrovarsi la stessa cifra dovrebbe valere $p - 2 = 2(n-1)$, cioè $p = 2n$, impossibile perché p è primo.

Allo stesso modo si trova che se ne avesse vinte 3 e perse $p-3$ allora p dovrebbe essere divisibile per 3, e così via. Quindi Ian ha vinto solo una partita, e i giocatori a quel tavolo quella sera erano esattamente p.

Quesito 4. Risposta (D): 5.

Un modo semplice per trovare il raggio del cerchio passante per i tre punti di Fig.1 è ad esempio disegnare i due segmenti che uniscono A con B e B con C e, successivamente, disegnare gli assi dei due segmenti, come in Fig.2 . L'intersezione delle due rette coincide con il centro del cerchio. Si può ipotizzare che il centro abbia coordinate (0,0) e verificare facilmente che il raggio del cerchio passante per A, B e C è 5.



Quesito 5. Risposta (A): 1.112,659.

Il raggio r del parallelo passante per il porto spaziale di Mos Eisley e il palazzo di Jabba he Hutt è la metà di quello del pianeta Tatooine, $r = \frac{1}{2}R$ (considerando che in un triangolo rettangolo con un angolo di 60° il cateto minore è lungo metà dell'ipotenusa). L'angolo al centro α che sottende l'arco di parallelo che in direzione Est va dal porto spaziale di Mos Eisley al palazzo di Jabba he Hutt misura 20° ovvero $\frac{\pi}{9}$ radianti, sicché la lunghezza dello stesso arco di parallelo è $L = r\alpha$, cioè $L = \frac{1}{2}R \times \frac{\pi}{9} = 1,57 \times \frac{R}{9} = 1,57 \times 708,7 = 1.112,659$.

Quesito 6. Risposta (C): $0 < a \leq 4$.

Per dimostrarlo, si noti innanzitutto che -1 è radice del polinomio $P_4(x) = x^4 + ax^3 + 2(a-1)x^2 + ax + 1$: quindi $P_4(x)$ è sempre divisibile per $(x+1)$. Eseguendo la divisione tra $P_4(x)$ e $(x+1)$, si trova: $P_4(x) = (x+1)P_3(x)$, con $P_3(x) = x^3 + (a-1)x^2 + (a-1)x + 1$. Notiamo ora che anche $P_3(x)$ ammette -1 come radice: quindi anche $P_3(x)$ è sempre divisibile per $(x+1)$. Eseguendo la divisione tra $P_3(x)$ e $(x+1)$, si trova: $P_3(x) = (x+1)P_2(x)$, con $P_2(x) = x^2 + (a-2)x + 1$. Abbiamo ora tre casi:

(1) Il discriminante $\Delta = (a-2)^2 - 4$ di $P_2(x)$ è < 0, che si verifica per $0 < a < 4$. In questo caso $P_2(x)$ non ammette radici reali, quindi $P(x) = (x+1)^2 P_2(x)$ ammette -1 come unica radice reale.
(2) $\Delta > 0$, che si verifica per $a < 0$ o $a > 4$. In questo caso $P_2(x)$ ammette due radici reali distinte, nel qual caso $P(x) = (x+1)^2 P_2(x)$ ammette almeno due radici reali distinte.
(3) $\Delta = 0$, che si verifica per $a = 0$ o $a = 4$. Se $a = 0$, allora $P_2(x) = (x-1)^2$ e quindi $P(x) = (x+1)^2(x-1)^2$ ammette due radici reali distinte, ± 1. Se $a = 4$, allora $P_2(x) = (x+1)^2$ e quindi $P(x) = (x+1)^4$ ammette -1 come unica radice reale.

In conclusione, $P(x)$ ammette un'unica radice reale, uguale a -1, se e solo se $0 < a \leq 4$.

Quesito 7. Risposta (B): $a\sqrt{1 - a^2/R^2}$.

Per dimostrarlo, si fissi un sistema di coordinate cartesiane centrate nel centro del cerchio, con assi x e y paralleli ai semiassi minori e maggiori delle ellissi e orientati verso destra e verso l'alto, rispettivamente. L'equazione dell'ellisse di destra in tale sistema di coordinate è $(x-b)^2/b^2 +$

$y^2/a^2 = 1$, mentre l'equazione del cerchio è $x^2 + y^2 = R^2$. L'ellisse è tangente al cerchio se e solo se il sistema

$$\begin{cases} (x-b)^2/b^2 + y^2/a^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases} \tag{1}$$

ha esattamente due soluzioni. Dalla prima equazione troviamo:

$$y^2 = a^2 - (x-b)^2 a^2/b^2 \tag{2}$$

che, sostituita nella seconda, ci dà: $x^2 + a^2 - (x-b)^2 a^2/b^2 = R^2$ o, equivalentemente:

$$x^2(1 - a^2/b^2) + (2a^2/b)x - R^2 = 0 \tag{3}$$

il cui discriminante è $\Delta = 4\big[R^2 - a^2(R^2 - a^2)/b^2\big]$. Il sistema (1) ammette esattamente due soluzioni se e solo se l'equazione (3) ammette un'unica soluzione: infatti, ogni soluzione della (3) fornisce due soluzioni della (2), e quindi del sistema (1). In conclusione, il sistema (1) ammette esattamente due soluzioni se e solo se $\Delta = 0$, ovvero se $b^2 = a^2(R^2 - a^2)/R^2$, come volevasi dimostrare.

Quesito 8. Risposta (C): 1/24.

Nel periodo da $t = 1$ a $t = 12,05$ la contrarerei lancia 23 raggi agli istanti $t = 1, 3/2, 2, \ldots, 12$ e le probabilità che ha Luke di non essere colpito sono

$$1 - \frac{1}{2},\ 1 - \frac{1}{3},\ \ldots,\ 1 - \frac{1}{23},\ 1 - \frac{1}{24}.$$

La probabilità complessiva è data dal prodotto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{23}\right)\left(1 - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{22}{23}\frac{23}{24} = \frac{1}{24}\,.$$

Quesito 9. Risposta (A): il dado di Gerolamo.

Chiamiamo G,P e B i tre dadi rispettivamente.
Lanciando ciascuno una volta il proprio dado, Gerolamo vince su Pierre se il dado G dà un 5 (probabilità $\frac{1}{2}$), o in alternativa se G dà un 4 (probabilità $\frac{1}{6}$) e P non dà uno dei tre 4 (probabilità $\frac{1}{2}$); la probabilità che G prevalga su P è dunque

$$\mathcal{P}(G \text{ batte } P) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}.$$

Blaise vince su Pierre se il dado B dà un 6 (probabilità $\frac{2}{6}$), oppure se B non dà un 6 (probabilità $\frac{4}{6}$) e P dà un 1 (probabilità $\frac{1}{6}$); la probabilità che Pierre prevalga su Blaise è dunque

$$\mathcal{P}(P \text{ batte } B) = 1 - (\frac{2}{6} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}) = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}.$$

Infine, Blaise vince su Gerolamo se il dado B dà un 6, oppure se B non dà un 6 e G dà un 1; la probabilità che Blaise prevalga su Gerolamo è dunque

$$\mathcal{P}(B \text{ batte } G) = \frac{1}{3} + (\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{6}) = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}.$$

Ogni dado è pertanto avvantaggiato su uno degli altri due, e svantaggiato sul restante; poiché però

$$\mathcal{P}(G \text{ batte } P) > \mathcal{P}(P \text{ batte } B) = \mathcal{P}(B \text{ batte } G) > \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{1}{2} > \mathcal{P}(G \text{ batte } B) = \mathcal{P}(B \text{ batte } P) > \mathcal{P}(P \text{ batte } G),$$

il dado di Gerolamo è il più avvantaggiato nel gioco (in uno o più lanci).

Quesito 10. Risposta (E): 3.

Per minimizzare il tempo di addobbo occorre ottimizzare l'utilizzo dei due "addobbatori". Il numero di palline colorate da Luke deve quindi essere circa uguale a 3 volte quelle colorate da

Leila (k).
Quindi $3k + k = n$ (dove $n = 2^N - 1$ è il numero totale di nodi dell'albero, vedi sotto per una giustificazione di ciò).
Da cui $k = n/4 = n/2^2$.
Ne consegue che l'altezza del sottoalbero di Leila deve essere $\lceil log_2(k) \rceil = \lceil log_2(n/2^2) \rceil = \lceil log_2(n) - log_2(2^2) \rceil = \lceil log_2(n) - 2 \rceil$ (dove $\lceil x \rceil$ indica il più piccolo intero non minore di x). Quindi, la punta del sottoalbero di Leila deve cadere sempre a livello 3.
Questo è un risultato oltremodo intuitivo, perchè si ottiene delegando a Leila uno qualsiasi dei quattro sottoalberi che ha per radice una pallina a livello 3.

Alternativamente la soluzione può essere ottenuta considerando che il numero totale di palline presenti in un albero con N livelli (come in figura, in cui $N = 4$) è

$$n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{N-1} = \frac{1 - 2^N}{1 - 2} = 2^N - 1. \tag{4}$$

Se l'albero si fermasse al livello $N = 2$ (con $n = 3$ palline) per ottimizzare il tempo basta che le palline siano sistemate tutte da Luke. A partire dal livello $N = 3$ in poi serve l'apporto di Leila, che ne addobba k nel tempo in cui Luke ne addobba $3k$. Quindi le palline da dividersi sono $n - 3$, da cui

$$n - 3 = k + 3k,$$

e

$$k = \frac{n-3}{4} = \frac{2^N - 4}{4} = 2^{N-2} - 1,$$

che confrontato con l'espressione (4), esprimente il numero di palline in un albero a N livelli, mostra che il sottoalbero di cui si occupa Leila ha $N - 2$ livelli, quindi ha la punta al livello $N = 3$ dell'albero intero.

Quesito 11. Risposta (F): 2.

La manovra lascia nelle mani del quarto clone sempre lo stesso mitra, numerato con il numero 4. Di fatto sono gli altri 9 cloni che si passano le armi tra loro, operando una permutazione di una posizione su 9 elementi. Ogni 27 secondi si ritorna sulla posizione iniziale. Poiché

$$5min = 300sec = (27 \times 11 + 3)sec$$

dopo 5 minuti di addrestramento i cloni hanno fatto girare le armi per 11 giri completi più una manovra.

Quesito 12. Risposta (B): $C(a, b) = C(b, a)$ e $C(a, b + a) \geq C(a, b)$ per ogni a, b.

È infatti generalmente falso che $C(a, b + 1) \geq C(a, b)$ (ad esempio $C(2, 3) = 1$, $C(2, 2) = 2$) e che $C(a + 1, b) = C(a, b + 1)$ (ad esempio $C(3, 3) = 3$ e $C(2, 4) = 4$). Dimostriamo adesso che $C(a, b) = C(b, a)$. Per definizione $C(a, b)$ è uguale al numero di elementi dell'insieme

$$\mathcal{C}(a, b) = \{i = 1, \ldots, b \mid \frac{ia}{b} \text{ è intero}\}.$$

Esiste dunque un'applicazione bigettiva

$$f \colon \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(b, a), \qquad f(i) = \frac{ia}{b}.$$

Osserviamo che $C(a, b) = C(a + b, b)$, in quanto un numero ia è divisibile per b se e solo se $i(a + b) = ia + ib$ è divisibile per b. Scambiando a e b si ottiene $C(b, a) = C(a + b, a)$ e dunque

$$C(a, b) = C(b, a) = C(a + b, a) = C(a, a + b) \ .$$

Quesito 13. Risposta: 13.

Osserviamo che $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Ci sono 12 multipli di 7 da 1 to 85. Sono $7, 14, 21, \ldots 84$. Inoltre c'è un multiplo di $7^2 = 49$. Quindi l'esponente di 7 nella fattorizzazione di 85! è 13. È facile vedere

che gli esponenti di 2 e 3 sono più grandi di 13. Quindi l'intero k più grande con la proprietà desiderata è 13.

Quesito 14. Risposta: 1.

Si chiami $t(n)$ il numero che si ottiene sommando le cifre di n, e ripetendo questa operazione finché non si ottiene una sola cifra. Ad esempio per $n = 32643$, si ha $t(n) = 4$, perché $3+2+6+4+7 = 22$ e $2 + 2 = 4$.

Si noti anzitutto che per ogni intero n, la somma delle cifre di n è congrua a n modulo 9. In particolare, anche $t(n)$ è congruo a n modulo 9.

Di conseguenza partendo dalla lista completa (inclusi i multipli di 11) $1, 2, 3, \ldots, 999999, 1000000$ di tutti i numeri da uno a un milione, la corrispondente lista di numeri $t(1), t(2), t(3), \ldots, t(999999)$, $t(1000000)$ risulta essere la seguente lista (con un milione di termini): $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, \ldots$, $9, 1$, che termina per $1 = t(1000000)$: in questo caso si avrebbe un'occorrenza di 1 in più rispetto alle altre occorrenze della successione.

Cosa succede se si cancellano tutti i multipli di 11?

Si noti che se un numero è multiplo di 11, cioè della forma $n = h * 11$, allora $t(n) = t(h * 11) = t(h*10+h*1) = t(h+h) = t(2h)$: quindi per l'insieme $\{(h+1)*11, (h+2)*11, \ldots, (h+9)*11\}$ di nove multipli successivi qualunque di 11 si ottiene $\{t((h+1)*11), t((h+2)*11), \ldots, t((h+9)*11)\} = \{2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7, 9\}$ (in quest'ordine esatto, qualora h sia multiplo di 9).

Dato che il penultimo numero della lista $999999 = 11 * 90909$ è un multiplo di 11 (e di 9) si ha $t(999999) = 9$. Questo vuol dire che cancellando tutti i multipli di 11 dalla lista completa $1, 2, 3, \ldots, 999999, 1000000$, avremmo cancellato un numero uguale di occorrenze di $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, $8, 9$ dalla lista $t(1), t(2), t(3), \ldots, t(999999), t(1000000)$: ancora una volta dunque la cifra più frequente è $1 = t(1000000)$, che compare esattamente una volta in più delle altre.

Quesito 15. Risposta: 2.

I primi membri delle date equazioni sono i valori del polinomio $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = (x-1)^3 + 2(x-1)+3$ calcolato per $x = \alpha$ e $x = \beta$. Consideriamo ora la funzione $g(y) = y^3 + 2y$. Essa risulta essere strettamente crescente, poiché somma di funzioni crescenti. Quindi i numeri α e β sono univocamente determinati dalle equazioni $g(\alpha - 1) = f(\alpha) - 3 = -2$ e $g(\beta - 1) = f(\beta) - 3 = 2$. Poiché la funzione $g(y)$ è dispari, deve risultare $\alpha - 1 = -(\beta - 1)$, da cui $\alpha + \beta = 2$.