

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE ALLA SAPIENZA

Roma, 29 aprile 2015

Dipartimento di Matematica,
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.,
Sapienza Università di Roma.

Ogni esercizio fornisce il punteggio indicato tra parentesi.

Quesito 1. (8 punti - consegnare entro la prima ora)

Una macchina prende un qualsiasi numero intero $n \geq 0$ come *input* e produce un nuovo numero intero $n' \geq 0$ come *output*, secondo una legge deterministica precisa che dipende solo dal numero n assegnato.

L'unica nota lasciata dal programmatore è che: riapplicando la macchina al numero n' prodotto a partire da n , la macchina fornisce un numero n'' come output, e riapplicandola ad n'' la macchina fornisce un numero n''' tali che

$$n' + n'' + n''' = 3n$$

(i) quanti differenti numeri in input, al massimo, producono lo stesso output?

(ii) se la macchina riceve n in input, è possibile dedurre quale sarà l'output?

Quesito 2. (9 punti - consegnare entro la prima ora)

La sequenza di interi positivi x_n è definita nel seguente modo:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = n + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

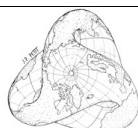
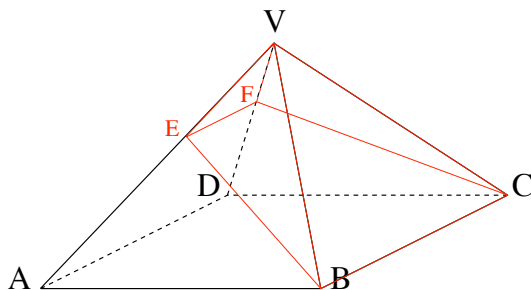
Provare che non ci sono quadrati di numeri naturali in questa sequenza, eccetto x_1 .

Quesito 3. (11 punti)

Dire, motivando la risposta, qual è il più piccolo numero reale positivo r tale che ogni semicerchio nel piano euclideo di diametro r contiene almeno un punto a coordinate intere.

Quesito 4. (12 punti)

Tagliamo la piramide \mathcal{P} in figura, con base quadrata di area unitaria e altezza unitaria, con un piano contenente lo spigolo BC , che interseca gli spigoli AV e DV in E, F rispettivamente. La piramide \mathcal{P}' di base $EFBC$ e vertice V ha volume pari a un quarto del volume di \mathcal{P} : quanto vale EF ?



PROGETTO OLIMPIADI
SEZIONE DI ROMA

Progetto Olimpiadi della Matematica
Sezione di Roma

www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi

