Roma, 4 marzo 2015

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

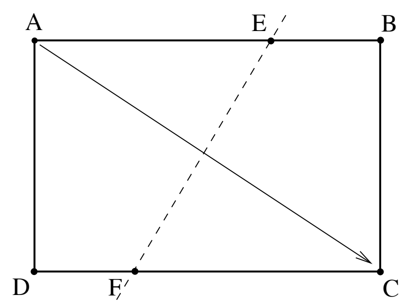
Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

Quesito 1. Siano a, b due numeri reali. Quali delle seguenti affermazioni è vera:

(A) $a \leq a^2$
(B) $a \leq a^3$
(C) se $a > 0$ allora $\sqrt{a} < a$
(D) se $a < b$ allora $a^2 < b^2$
(E) se $a^2 < b^2$ allora $a < b$
(F) sono tutte false

Quesito 2. Un rettangolo di carta di lati AB e BC, di lunghezze rispettivamente x, y, con $x > y$, viene piegato in modo da sovrapporre il punto A al punto C. Qual è la lunghezza della linea lungo la quale è effettuata la piegatura?



(A) $\sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}$
(B) $\frac{y+\sqrt{y}}{x}$
(C) $\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}$
(D) $(x-y)^2 + (x-y)$
(E) $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$
(F) $\sqrt{x^2 + y^2} - y$

Quesito 3. Da un mazzo di carte francesi di 52 carte, un giocatore scarta due carte: un re di cuori e un asso di picche. Poi dispone tre carte scoperte sul tavolo. Qual è la probabilità che queste siano un tris di re?

(A) 47!/50!
(B) 47!3!/50!
(C) 47!3!/52!
(D) 3!/50!
(E) 3!/52!
(F) 3/50

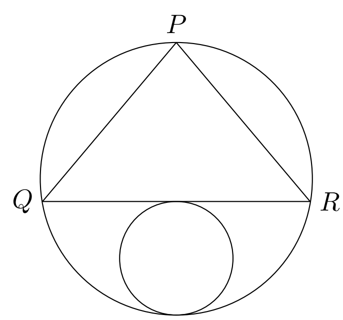
Quesito 4. Alice e Bernardo fanno il seguente gioco: Alice sceglie arbitrariamente tre numeri, Bernardo li sostituisce in un ordine a suo piacimento al posto degli asterischi ($*$) nell'equazione di secondo grado

$$*x^2 + *x + * = 0.$$

Alice vince se la corrispondente equazione ha due soluzioni razionali distinte, altrimenti vince Bernardo. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) Bernardo vince se almeno uno dei numeri scelti da Alice è irrazionale
(B) Bernardo vince se tutti e tre i numeri scelti da Alice sono irrazionali
(C) Alice vince se sceglie tre numeri razionali distinti
(D) Alice vince sempre se sceglie opportunamente i numeri
(E) Bernardo vince sempre posizionando opportunamente i numeri scelti da Alice
(F) Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta

Quesito 5. Nella seguente figura



il cerchio grande ha raggio 3, il triangolo inscritto PQR è isoscele con i lati PQ e PR di lunghezza $2\sqrt{5}$ ed il cerchio piccolo è tangente al cerchio grande ed al lato QR nel suo punto medio. Quanto è lungo il diametro del cerchio piccolo?

(A) 2
(B) 5/2
(C) 7/3
(D) 8/3
(E) $2\sqrt{2}$
(F) 3

Quesito 6. Quante sono le terne ordinate (x, y, z) di numeri interi che verificano

$$x - y + z = 2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 30 \qquad x^3 - y^3 + z^3 = 116?$$

(A) nessuna
(B) 1
(C) 3
(D) 6
(E) infinite
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 7. Con quante cifre si scrive, in base 2, il numero intero $\binom{150}{50}$?

(A) tra 1 e 10
(B) tra 11 e 20
(C) tra 21 e 40
(D) tra 41 e 80
(E) tra 81 e 160
(F) tra 161 e 320

Quesito 8. Il rapporto tra il volume di un tetraedro regolare e quello della sfera ad esso circoscritta è:

(A) $2/(3\sqrt{3}\pi)$
(B) $1/\pi$
(C) $\sqrt{2/(3\pi)}$
(D) $1/(16\pi)$
(E) $\sqrt{3}/(16\pi)$
(F) $\sqrt{2}/24\pi$

Quesito 9. In una comunità di 100 persone, si rilevano le seguenti quattro caratteristiche: 70 persone hanno gli occhi marroni, 75 hanno i capelli castani, 85 hanno altezza superiore a 1m e 70 cm, e 90 pesano più di 65 kg. Sia n il numero di persone che hanno tutte e quattro queste caratteristiche. Allora:

(A) non è detto che $n > 0$
(B) $n = 20$
(C) non è possibile che $n = 20$
(D) se $n > 20$ esiste qualcuno che ha meno di 3 caratteristiche
(E) il numero di persone con almeno 3 caratteristiche è inferiore a 100
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 10. Quante sono le soluzioni intere dell'equazione $n^3 = 100...00500...001$ (il numero ha p zeri prima e q zeri dopo la cifra 5, con p e q interi)?

(A) nessuna
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) dipende solo da p
(F) il numero di soluzioni varia, e dipende da p e da q

Quesito 11. Andrea fa un incubo nel quale un folletto gli insegna una moltiplicazione tra punti del piano euclideo con un riferimento cartesiano fissato. Presi due punti A, B nel semipiano π^+ di ordinata positiva
– si considera il punto A' di intersezione della circonferenza unitaria centrata nell'origine O con la semiretta contenente OA;
– si ruota B in senso antiorario dell'angolo che OA forma con l'asse positivo delle x, ottenendo un nuovo punto B';
– si traccia la retta passante per A e parallela al segmento $A'B'$, che incontra il prolungamento del segmento OB' nel punto C, detto *prodotto* $A * B$.
Quale delle seguenti è falsa:

(A) $A * B = B * A$ se $A, B \in \pi^+$
(B) $A * (B * C) = (A * B) * C$ se $A, B, A * B$ e $B * C \in \pi^+$
(C) esiste $A \in \pi^+$ tale che $A * A = P = (0, 1)$
(D) esiste $A \in \pi^+$ tale che $A * A = Q = (-1, 0)$
(E) esiste $A \in \pi^+$ tale che $A * A = Q = (0, -1)$
(F) una delle precedenti è falsa

Quesito 12. All'asilo, 20 bambini sono in fila per prendere un dolcetto dalla maestra. Possono scegliere tra un dolcetto alla fragola e uno al mirtillo. I bimbi tendono a imitarsi: ognuno sceglie con una probabilità del 75% lo stesso gusto di quello scelto dal bambino subito avanti nella fila. Se il primo della fila sceglie fragola, qual è la probabilità che l'ultimo scelga mirtillo?

(A) $(1/4)^{19} \cdot 356215$
(B) $(1/4)^{20} \cdot 356215$
(C) $(1/4) + 1/2^{20}$
(D) $3/4 - 1/2^{19}$
(E) $1/2 - 1/2^{20}$
(F) $1/2 + 1/2^{19}$

Quesito 13. Si hanno due dadi a 6 facce. Su ogni faccia di ciascuno dei due dadi compare un numero compreso tra 1 e 7. (Un dado può presentare più facce con lo stesso numero.)
Sappiamo che, se si lanciano i due dadi contemporaneamente, si ottengono tutti e soli i numeri interi fra 2 e 13, tutti con stessa probabilità.
Quanto vale la somma di tutti i numeri scritti sulle facce dei due dadi?

Quesito 14. È data una scacchiera 3×3. Se Q_1 e Q_2 sono due dei nove quadratini della scacchiera, diciamo che Q_2 è strettamente alla destra di Q_1 se la colonna che contiene Q_2 si trova a destra della colonna che contiene Q_1; comunque scegliamo Q_1, i quadratini che si trovano strettamente alla sua destra possono essere 6, 3 oppure nessuno. Allo stesso modo definiamo il concetto di trovarsi strettamente a sinistra, al di sopra, al di sotto.
La scacchiera va riempita con numeri interi non negativi, in modo che:

- almeno un quadratino contenga il numero 1;
- il numero riportato su ciascun quadratino è la somma di tutti i numeri contenuti sulle caselle che si trovano strettamente alla sua destra, oppure di quelle che si trovano strettamente alla sua sinistra, oppure di quelle che si trovano strettamente al di sopra o strettamente al di sotto.

Ad esempio, una casella che si trova sulla colonna più a sinistra può (ma non deve necessariamente) contenere il valore 0, in quanto 0 è somma di tutte le caselle che si trovano strettamente più a sinistra (infatti non ve ne sono, e la somma di nessun valore è 0).
Supponiamo che i valori su ciascuna casella siano scelti in modo che il numero degli 0 presenti sia il minimo possibile. Determinare il valore massimo che può assumere la somma di tutti i valori sulla scacchiera.

Quesito 15. Determinare, se esiste, il più piccolo numero naturale n che gode della seguente proprietà: per ogni successione crescente di interi $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, il prodotto di tutte le $n(n-1)/2$ differenze

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = (x_n - x_1)(x_n - x_2)\cdots(x_2 - x_1)$$

è divisibile per 300.