PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA INDIVIDUALE ALLA SAPIENZA

Roma, 29 aprile 2015

Dipartimento di Matematica,
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.,
Sapienza Università di Roma.

Quesito 1.
Una macchina prende un qualsiasi numero intero $n \geq 0$ come input e produce un nuovo numero intero $n' \geq 0$ come output, secondo una legge deterministica precisa che dipende solo dal numero n assegnato.
L'unica nota lasciata dal programmatore è che: riapplicando la macchina al numero n' prodotto a partire da n, la macchina fornisce un numero n'' come output, e riapplicandola ad n'' la macchina fornisce un numero n''' tali che

$$n' + n'' + n''' = 3n$$

(i) quanti differenti numeri in input, al massimo, producono lo stesso output?

(ii) se la macchina riceve n in input, è possibile dedurre quale sarà l'output?

Soluzione. Ogni output n' può essere ottenuto da un solo numero n in input: infatti, se $n' = m'$, anche $n'' = m''$ e $n''' = m'''$, dunque

$$3n = n''' + n'' + n' = m''' + m'' + m' = 3m,$$

e deduciamo che $n = m$; ovvero, la legge $n \mapsto n'$ è *iniettiva.*
Calcoliamo ora $0'$: si ha $0''' + 0'' + 0' = 0$, e poiché la macchina produce numeri naturali, necessariamente deve essere $0' = 0$. Adesso cerchiamo di determinare $1'$. Essendo la legge iniettiva, $1' \neq 0$, dunque $1'' \neq 0$, che implica a sua volta $1''' \neq 0$. Poiché la legge $'$ produce valori interi, necessariamente queste tre quantità devono essere maggiori o uguali a 1, e dato che la loro somma fa 3, si deve avere $1' = 1$. Si vede quindi "apparire" la soluzione al problema, che può essere dimostrata induttivamente: sia $n \geq 1$ e supponiamo che per ogni $k < n, k' = k$; dall' iniettività segue allora che che n', n'' e n''' sono tutti maggiori o uguali a n, e poiché la loro somma fa $3n$ deve aversi $n' = n$.

Quesito 2.
La sequenza di interi positivi x_n è definita nel seguente modo:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = n + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Provare che non ci sono quadrati di numeri naturali in questa sequenza, eccetto x_1.

Soluzione. Si noti innanzitutto che $x_2 = 2$ e $x_3 = 2 + x_1^2 + x_2^2 = x_2 + 1 + x_2^2$. Proviamo allora a dimostrare per induzione che $x_n = x_{n-1}^2 + x_{n-1} + 1$ per ogni $n \geq 3$. In effetti:

$$x_{n+1} = 1 + n + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 = 1 + x_n + x_n^2.$$

Allora, per $n \geq 1$ risulta

$$x_n^2 < x_{n+1} < (x_n + 1)^2,$$

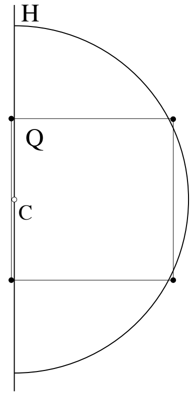
il che mostra che, per $n \geq 1$, x_{n+1} è compreso tra due quadrati consecutivi, e quindi non può essere un quadrato.

Quesito 3.
Dire, motivando la risposta, qual è il più piccolo numero reale positivo r tale che ogni semicerchio nel piano euclideo di diametro r contiene almeno un punto a coordinate intere.

Soluzione. La risposta è $r = \sqrt{5}/2$. Vediamo innanzitutto che per ogni numero reale positivo $r_0 < \sqrt{5}/2$ possiamo trovare un semicerchio di raggio r_0 che non contiene punti a coordinate intere. A tal fine, scegliamo $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che

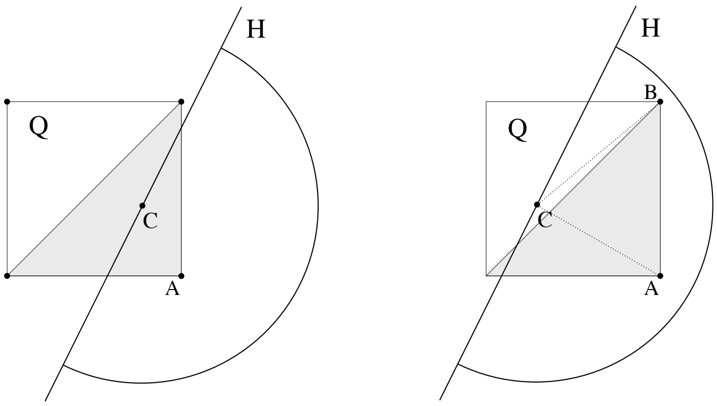
$$r_0 < \sqrt{(1-\epsilon)^2 + \frac{1}{4}} < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

e verifichiamo che il semicerchio di raggio r_0 e centro $C = (\epsilon, \frac{1}{2})$, contenuto nel semipiano H di equazione $x \geq \epsilon$, non contiene punti a coordinate intere:



In effetti, i punti a coordinate intere nel semipiano $x \geq \epsilon$ più vicini a C sono $(1,0)$ e $(1,1)$, che distano da C esattamente $\sqrt{(1-\epsilon)^2 + \frac{1}{4}} > r_0$.

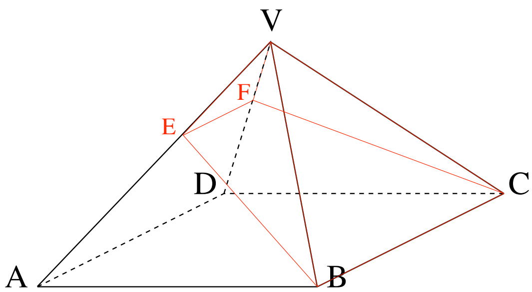
Siccome ogni semicerchio di raggio r contiene al suo interno semicerchi di raggio r_0, per ogni $r_0 \leq r$, per concludere la dimostrazione basta provare che ogni semicerchio chiuso (comprensivo cioè del suo bordo) di raggio $\sqrt{5}/2$ contiene almeno un punto a coordinate intere. Pensiamo il nostro semicerchio come l'intersezione di un cerchio di centro C e raggio $\sqrt{5}/2$ con un semipiano H, delimitato da una retta passante per C. Indichiamo con Q un quadrato di lato 1, di vertici a coordinate intere, che contiene il centro c. Occorre ora distinguere due casi:



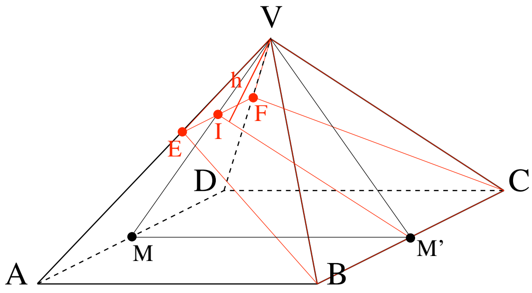
1) il semipiano H contiene un solo vertice del quadrato, che chiamiamo A. In tal caso, il centro C appartiene al triangolo rettangolo che ha come cateti i due lati del quadrato adiacenti ad A; questo implica che la distanza di A da C è minore od uguale ad 1.

2) il semipiano H contiene almeno due vertici A, B del quadrato. In tal caso, osserviamo che il quadrato è interamente contenuto nell'unione dei due cerchi di raggio $\sqrt{5}/2$ e centri A e B; pertanto uno di questi due punti cade necessariamente nel semicerchio.

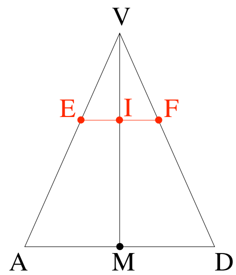
Quesito 4.
Tagliamo la piramide $\mathcal{P}$ in figura, con base quadrata di area unitaria e altezza unitaria, con un piano contenente lo spigolo BC, che interseca gli spigoli AV e DV in E, F rispettivamente. La piramide $\mathcal{P}'$ di base $EFBC$ e vertice V ha volume pari a un quarto del volume di $\mathcal{P}$: quanto vale EF?



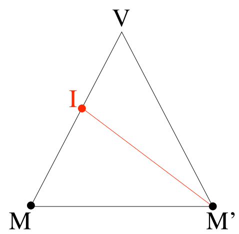
Soluzione. Il volume della piramide $\mathcal{P}$ vale $vol(\mathcal{P}) = \frac{1}{3}$. Chiamiamo x la lunghezza del segmento EF, h l'altezza della piramide $\mathcal{P}'$ sulla base $BCFE$, ed I, M, M' rispettivamente i punti medi di EF, AD e BC:



La base $\mathcal{B}$ della piramide $\mathcal{P}'$ è un trapezio con $area(\mathcal{B}) = \frac{1}{2}(1+x)IM'$, dunque $\mathcal{P}'$ ha $vol(\mathcal{P}') = \frac{1}{6}(1+x)IM' \cdot h$.
Ma $\frac{IM' \cdot h}{2}$ è l'area del triangolo VIM': determiniamo questa area.
Consideriamo innanzitutto i triangoli simili VEF e VAD:



e deduciamo che $\frac{VI}{VM} = \frac{EF}{AD} = x$. Quindi consideriamo i triangoli VIM' e VMM':



e deduciamo che $\frac{area(VIM')}{area(VMM')} = \frac{VI}{VM} = x$. Dunque $\frac{IM' \cdot h}{2} = area(VIM') = x \cdot area(VMM') = x/2$.
Ne segue che $vol(\mathcal{P}') = \frac{1}{6}(1+x)x$ e che $vol(\mathcal{P}') = \frac{1}{4}vol(\mathcal{P})$ se $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.