Roma, 4 marzo 2015

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
Unione Matematica Italiana,
Progetto Lauree Scientifiche, CARFID

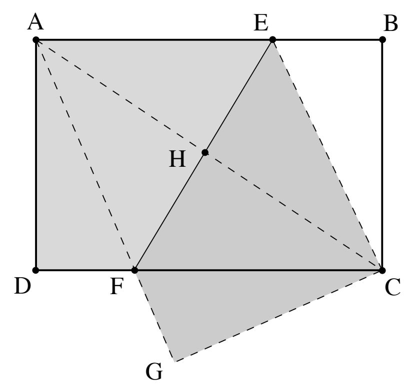
SOLUZIONI

Quesito 1. Risposta (F): sono tutte false.

Le prime tre asserzioni sono false se $0 < a < 1$. La quarta è falsa se $a < 0 < b$ e $|a| > b$. La quinta è falsa se $b < 0 < a$ e $|b| > a$.

Quesito 2. Risposta (C): $\frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}$.

Si pensi alla linea EF lungo cui avviene la piegatura come ad un asse di simmetria ortogonale: si ha



dunque $AE = EC = CF$, $FD = FG$, $CG = AD = BC$ ed $AF = FC$. Ne segue che $AECF$ è un rombo; AC è perpendicolare ad EF e lo divide in due parti uguali nel punto H. I triangoli AHE e ABC sono simili e $EH : BC = AH : AB$. Quindi

$$EF = 2EH = 2AH \cdot \frac{BC}{AB} = \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Quesito 3. Risposta (B): $47!3!/50!$

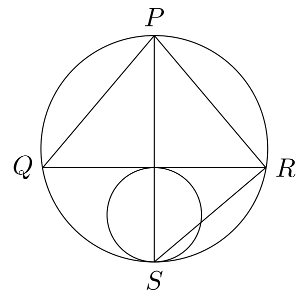
Infatti, una volta scartati il re di cuori e l'asso di picche, il mazzo rimanente è di 50 carte e contiene esattamente tre re. Il numero delle terne di carte che si possono estrarre da un mazzo di 50 carte è $\binom{50}{3} = \frac{50!}{3!47!} = 50 \cdot 49 \cdot 48/6 = 19600$. Dato che una sola terna tra tutte quelle possibili corrisponde a un tris di re, la probabilità che questa venga estratta è $1/\binom{50}{3} = 47!3!/50! = 1/19600$.

Quesito 4. Risposta (D): Alice vince sempre se sceglie opportunamente i numeri.

È sufficiente per Alice scegliere i numeri 1, 2, -3, o qualsiasi altra terna di numeri razionali distinti non nulli a, b, c, la cui somma sia nulla. Allora, qualunque sia il posizionamento di Bernardo, il numero 1 sarà soluzione dell'equazione e l'altra radice sarà pure razionale. Infatti l'altra radice di $ax^2 + bx + c = 0$ è c/a, che è razionale e differente da 1 in quanto $c \neq a$.

Quesito 5. Risposta (D): $\frac{8}{3}$.

Indichiamo con S il punto in cui il cerchio piccolo interseca il cerchio grande.



Siccome la figura è simmetrica rispetto all'altezza del triangolo, il segmento PS è un diametro del cerchio grande ed il triangolo PRS è rettangolo con ipotenusa uguale al diametro del cerchio grande. Se d indica il diametro del cerchio piccolo, per il primo teorema di Euclide si ha $6d = SR^2$ e per il teorema di Pitagora $SR^2 + (2\sqrt{5})^2 = 6^2$. Dunque

$$d = \frac{36 - 20}{6} = \frac{8}{3}\ .$$

Quesito 6. Risposta (D): ci sono 6 terne di soluzioni.

La seconda equazione dà per x, y, z solo i possibili valori $\pm 1, \pm 2, \pm 5$. Ci sono a priori 48 terne ordinate (6 permutazioni di $1, 2, 5$ per i valori assoluti; e per ognuna, 8 possibilità per i segni da mettere $+++$, $++-$, $+-+$ etc.). Ma poi ci vengono in aiuto le altre equazioni. Nella prima gli addendi (e *non* i valori delle variabili) devono essere necessariamente $5, -2$ e -1. Quindi $x = 5, y = 2, z = -1$; oppure $x = 5, y = 1, z = -2$ etc., per un totale di sei possibilità (una volta scelto dove mettere come valore assoluto $1, 2$ e 5 i segni sono forzati). Infine si verifica che tutte queste sei possibilità fanno tornare i conti anche nell'equazione coi cubi.

Dunque i possibili valori per (x, y, z) sono:

$$(-1, 2, 5), (-1, -5, -2), (-2, 1, 5), (-2, -5, -1), (5, 1, -2), (5, 2, -1).$$

Quesito 7. Risposta (E): tra 81 e 160.

Il numero di cifre necessarie per scrivere un numero N in base 2 è l'intero n tale che $2^{n-1} \leq N < 2^n$, ed è quindi uguale a $n = \lfloor \log_2 N \rfloor + 1$. Calcoliamo dunque

$$\log_2 \binom{150}{50} = \log_2 \left(\frac{150 \cdot 149 \cdots 101}{50 \cdot 49 \cdots 1} \right) = \log_2 \left(\prod_{k=1}^{50} \frac{100 + k}{k} \right) = \sum_{k=1}^{50} \log_2 \left(1 + \frac{100}{k} \right).$$

Per $k = 1$ si ha $64 \leq 1 + \frac{100}{k} < 128$, dunque $6 \leq \log_2 \left(1 + \frac{100}{k}\right) < 7$.

Per $k = 2$ o $k = 3$ si ha $32 \leq 1 + \frac{100}{k} < 64$, dunque $5 \leq \log_2 \left(1 + \frac{100}{k}\right) < 6$.

Per $k = 4, 5$ o 6 si ha $16 \leq 1 + \frac{100}{k} < 32$, dunque $4 \leq \log_2 \left(1 + \frac{100}{k}\right) < 5$.

Per $7 \leq k \leq 13$ si ha $8 \leq 1 + \frac{100}{k} < 16$, dunque $3 \leq \log_2 \left(1 + \frac{100}{k}\right) < 4$.

Per $14 \leq k \leq 33$ si ha $4 \leq 1 + \frac{100}{k} < 8$, dunque $2 \leq \log_2 \left(1 + \frac{100}{k}\right) < 3$.

Per $34 \leq k \leq 50$ si ha $3 \leq 1 + \frac{100}{k} < 4$, dunque $1 < \log_2 3 \leq \log_2 \left(1 + \frac{100}{k}\right) < 2$.

Ne segue che

$$\log_2 \binom{150}{50} < 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 20 \cdot 3 + 17 \cdot 2 = 156$$

e

$$\log_2 \binom{150}{50} > 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 7 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 17 \cdot 1 = 106$$

quindi possiamo dire che il numero n di cifre necessarie per scrivere $\binom{150}{50}$ è tra 106 e 156.

Quesito 8. Risposta (A): $\dfrac{2}{3\sqrt{3}\pi}$.

Per verificarlo, iniziamo col calcolare il raggio della sfera circoscritta a un tetraedro regolare di lato ℓ. Scriviamo le coordinate cartesiane dei quattro vertici del tetraedro A, B, C, D, in un sistema di riferimento tale che la faccia ABC appartenga al piano xy e il lato AB appartenga all'asse x:

$$A = \left(\frac{\ell}{2}, 0, 0\right), \quad B = \left(-\frac{\ell}{2}, 0, 0\right), \quad C = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\ell, 0\right), \quad D = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\ell, h\right).$$

Nello scrivere le coordinate del vertice D abbiamo usato il fatto che la sua proiezione ortogonale sulla faccia ABC coincide con il centro geometrico della faccia. L'altezza h del vertice D rispetto alla base è tale che la distanza di D da uno qualsiasi dei vertici di base sia ℓ: $|\vec{AD}| = \sqrt{\ell^2/4 + \ell^2/12 + h^2} = \ell$, che implica $h = \sqrt{\frac{2}{3}}\ell$. Le coordinate del centro geometrico G del tetraedro sono la media aritmetica delle coordinate dei quattro vertici:

$$G = \frac{A + B + C + D}{4} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{6}\ell, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\ell\right)$$

e il raggio R della sfera circoscritta al tetraedro coincide con la distanza tra G e uno qualsiasi dei vertici:

$$R = R(\ell) = |\vec{GD}| = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\ell.$$

Il volume del tetraedro ($= \frac{1}{3}\times$ area di base $\times$ altezza) è quindi

$$Vol_{tetraedro} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\right)\sqrt{\frac{2}{3}}\ell = \frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$$

mentre il volume della sfera circoscritta è

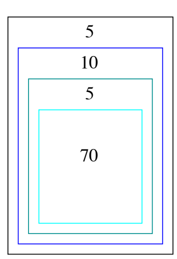
$$Vol_{sfera} = \frac{4}{3}\pi\big(R(\ell)\big)^3 = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\ell^3.$$

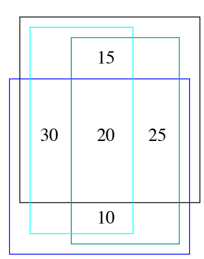
Infine:

$$\frac{Vol_{tetraedro}}{Vol_{sfera}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3}{\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}\pi\ell^3} = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi}.$$

Quesito 9. Risposta (D): se $n > 20$ esiste qualcuno che ha meno di 3 caratteristiche.

Le asserzioni (B) e (C), sono in generale false, come mostrano i due diagrammi di Venn qui di seguito, che soddisfano le ipotesi delle rilevazioni assegnate, ma in cui $n = 70$ e $n = 20$ rispettivamente; nel secondo caso inoltre, tutti e 100 gli individui hanno tre caratteristiche, il che confuta (E).





Mostriamo ora che (A) è falsa. Notiamo che il numero totale di rilevazioni delle quattro caratteristiche su tutta la comunità è $70 + 75 + 85 + 90 = 320$; se n persone hanno tutte e quattro le caratteristiche, le restanti $100 - n$ ne hanno in media $M = \frac{320-4n}{100-n} \leq 3$, il che implica $n \geq 20$. Invece, se $n > 20$, si ottiene $M < 3$, quindi in tal caso esiste per forza un individuo con meno di 3 caratteristiche, il che dimostra la (D).

Quesito 10. Risposta (A): non ci sono soluzioni.

Indipendentemente da p e da q, si ha che $1...00500...001 = 1...00499...994 + 7 \equiv 7(\mathrm{mod}9)$; infatti anche quando non ci sono zeri dopo la cifra 5, ovvero quando $q = 0$, si ha

$$1...0051 = 1...0044 + 7 \equiv 7(\mathrm{mod}9) :$$

invece il cubo di un intero non può essere congruo che a $0, 1$ oppure 8 (mod9).

Quesito 11. La risposta (F) è falsa: infatti le precedenti sono tutte vere.

Siano $\alpha = Arg(\overrightarrow{OA})$ e $\beta = Arg(\overrightarrow{OB})$ gli angoli che i vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ formano con l'asse positivamente orientato delle x. Poiché $|OA'| = 1$, il teorema di Talete dà: $|OC| = |OA| \cdot |OB|$, mentre chiaramente $\gamma = Arg(\overrightarrow{OC}) = \alpha+\beta$. Il vettore $\overrightarrow{OC}$, dunque, ha lunghezza uguale al prodotto delle lunghezze di $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ e argomento uguale alla somma dei loro argomenti. Poiché prodotto e somma di numeri reali sono operazioni commutative e associative, (a) e (b) sono verificate. Inoltre, tale interpretazione di $A * B$ rende le altre tre asserzioni geometricamente evidenti: si ha $A * A = (0, 1)$ se $\overrightarrow{OA}$ ha lunghezza 1 e argomento $\frac{\pi}{4}$, $A * A = (-1, 0)$ se $\overrightarrow{OA}$ ha lunghezza 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$, e $A * A = (0, -1)$ se $\overrightarrow{OA}$ ha lunghezza 1 e argomento π.

Nota: l'operazione $*$ non è altro che l'usuale moltiplicazione tra numeri complessi, una volta identificati gli elementi di $\mathbb{C}$ con i punti del piano.

Quesito 12. Risposta (E): $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{20}}$.

Sia p_n la probabilità che l'n-esimo bambino in fila scelga il dolcetto alla fragola (cosí che la probabilità che scelga il dolcetto al mirtillo è $1-p_n$). Per ipotesi, $p_1 = 1$ e $p_n = \frac{3}{4}p_{n-1}+\frac{1}{4}(1-p_{n-1})$, se $n > 1$. L'equazione per p_n può riscriversi nella forma $p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(p_{n-1} - \frac{1}{2})$, che è risolta da $p_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$. La probabilità che il 20^o bambino scelga il dolcetto al mirtillo è quindi $1-p_{20} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2^{20}}$.

Quesito 13. Risposta: 45.

Chiamiamo $m_1, m_2, \ldots, m_6$ i numeri sulle 6 facce del primo dado, e $n_1, n_2, , n_6$ i numeri sulle 6 facce del secondo dado. Vogliamo calcolare $T = m_1 + \cdots + m_6 + n_1 + \cdots + n_6$.

Ci sono 36 possibili esiti del lancio simultaneo dei due dadi: se appare la faccia i nel primo dado e la faccia j nel secondo dado, il valore ottenuto è $m_i + n_j$. Dunque, la somma di tutti i valori ottenuti in tutti e 36 i lanci sarà:

$$X = \sum_{i,j=1}^{6} (m_i + n_j) = \sum_{i,j=1}^{6} m_i + \sum_{i,j=1}^{6} n_j = 6\sum_{i=1}^{6} m_i + 6\sum_{j=1}^{6} n_j = 6T \,. \tag{1}$$

Daltro canto, sappiamo che i possibili esiti dei 36 lanci sono i numeri da 2 a 13, ciascuno con la stessa probabilità. Il che vuol dire che, nei 36 possibili esiti di lancio di dadi, si ottiene ciascuno dei 12 numeri $2, 3, \ldots, 13$ esattamente 3 volte. Ne segue che la somma di tutti i valori ottenuti in tutti e 36 i lanci sarà:

$$X = 3 \times (2 + 3 + \cdots + 13) = 3 \times \Big(\frac{13 \times 14}{2} - 1\Big) = 270 \,. \tag{2}$$

Confrontando i risultati (1) e (2), si ottiene immediatamente

$$T = \frac{270}{6} = 45 \,.$$

Per vedere che è possibile una configurazione delle facce dei dadi che rispecchino le richieste, basta prendere: il primo dado con i valori: 1,2,3,4,5,6, e il secondo dado con i valori: 1,1,1,7,7,7

Quesito 14. Risposta: 15.

È facile verificare che

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}$$

è un riempimento legittimo, e quindi esistono riempimenti della scacchiera con soli tre 0. Mostriamo che questo è il numero minimo di 0 presenti sulla scacchiera.

In effetti, la scacchiera deve contenere almeno un valore 1. Se è la casella centrale a contenere il valore 1, allora 1 è la somma dei valori su una riga o una colonna esterna della scacchiera; l'unico modo di ottenere 1 come somma di tre interi non negativi è $1 + 0 + 0$. Pertanto anche una delle altre caselle deve contenere il valore 1.

Se è una casella d'angolo (a meno di simmetrie e rotazioni possiamo supporre che sia l'angolo in alto a sinistra) a contenere il valore 1, allora 1 è somma delle caselle delle due righe più in basso o delle due colonne più a destra. L'unico modo di ottenere 1 come somma di 6 interi non negativi è $1+0+0+0+0+0$. Di conseguenza, in questo caso, vi sono almeno cinque caselle che contengono il valore 0.

Supponiamo adesso che sia una casella esterna ma non angolare a contenere il valore 1 (a meno di simmetrie e rotazioni possiamo supporre che sia la casella centrale della riga più in alto). 1 deve essere la somma delle caselle che si trovano strettamente al di sotto (cioè delle due righe più in basso), o delle caselle che si trovano strettamente a sinistra, oppure strettamente a destra.

Nel primo caso, vi sono nuovamente almeno 5 caselle che contengono il valore 0. Nel secondo, invece, possiamo supporre (a meno di simmetrie) che 1 sia la somma delle caselle sulla colonna più a destra. Ma allora due delle caselle di tale colonna contengono il valore 0, mentre l'altra contiene il valore 1. Possiamo anche supporre, senza perdere di generalità, che il valore 1 non sia in una casella d'angolo, altrimenti ricadiamo in un caso già considerato. I valori sulla scacchiera sono quindi disposti nella maniera seguente:

$$\begin{array}{ccc} * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \\ * & * & 0 \end{array}$$

Ripetiamo ora sulla colonna più a destra il ragionamento appena fatto. Possiamo concludere che nella riga più in alto o nella riga più in basso vi sono un valore 1 e due valori 0, e gli 0 si trovano nelle caselle d'angolo. I valori sono quindi disposti in una delle due maniere seguenti:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ * & * & 1 \\ * & * & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Di conseguenza, sicuramente almeno tre caselle contengono il valore 0. L'esercizio ci chiede quindi di calcolare la massima somma dei valori che compaiono sulla scacchiera quando vi sono esattamente tre 0. A meno di rotazioni, possiamo supporre che il riempimento sia del tipo

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{array}$$

Il valore b è uguale alla somma delle caselle strettamente al di sopra o a destra (che è sempre 1) oppure alla somma di quelle che si trovano strettamente al di sotto o a sinistra. In questi ultimi casi b è sicuramente maggiore o uguale a c.

Tuttavia c non può essere uguale alla somma delle caselle che si trovano strettamente al di sotto o a sinistra, perché tali somme sono 0, e sappiamo che la scacchiera contiene solo tre caselle con il valore 0. Pertanto c è uguale a $a + b + 2$ oppure a $b + d + 2$, che sono entrambi strettamente superiori a b. Otteniamo un assurdo, perché c non può essere contemporaneamente strettamente superiore e minore o uguale a b. In conclusione, $b = 1$.

Ragioniamo ora sui possibili valori di a e c. Il riempimento è finora

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ c & d & 0 \end{array}$$

Né a, né d possono essere uguali a 0. I possibili valori di a sono 1, $d+3$, $c+d$; allo stesso modo, i possibili valori di d sono 1, $a+3$, $a+c$. Se né a, né d sono uguali ad 1, allora ciascuno di essi è strettamente più grande dell'altro. Pertanto almeno uno di essi è uguale ad 1, e a meno di simmetrie possiamo supporre che sia d. Siamo quindi arrivati alla situazione seguente:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 \end{array}$$

Si vede subito che i possibili valori (non nulli) per a e c sono: $a = 1, 4, c+1$ mentre $c = 4, a+3$. L'opzione $a = c+1, c = a+3$ è l'unica incompatibile. Le altre danno $(a, c) = (1, 4), (4, 4), (4, 7), (5, 4)$. La scelta che massimizza la somma è $a = 4, c = 7$ che fornisce

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \end{array}$$

La somma massima è quindi 15.

Quesito 15. Risposta: $n = 7$.

Il numero n non può essere minore di 7, infatti se consideriamo la sestina $1, 2, 3, 4, 5, 6$ il prodotto delle differenze positive è $5 \times 4^2 \times 3^3 \times 2^4$ che non è divisibile per $300 = 5^2 \times 3 \times 2^2$.

Consideriamo adesso 7 numeri $x_1 < x_2 < \cdots < x_7$; siccome esistono 5 classi di resto modulo 5 si deve verificare almeno una delle seguenti situazioni:

(1) esistono tre indici $1 \leq i < j < k \leq 7$ tali che $x_i \equiv x_j \equiv x_k \pmod 5$;
(2) esistono due coppie di indici $1 \leq i < j \leq 7$, $1 \leq h < k \leq 7$ tali che

$$x_i \equiv x_j, \qquad x_h \equiv x_k, \qquad x_i \not\equiv x_h \pmod 5;$$

Nel primo caso il numero $N = (x_7 - x_1)(x_7 - x_2) \cdots (x_2 - x_1)$ è divisibile per $(x_k - x_j)(x_k - x_i)(x_j - x_i)$ ed a maggior ragione è divisibile per 5^3. Nel secondo caso N è divisibile per $(x_k - x_h)(x_j - x_i)$ e quindi è divisibile per 5^2. Allo stesso modo si dimostra che esiste una coppia di indici distinti $i < j$ tale che $x_i \equiv x_j \pmod 3$ e quindi N è divisibile per 3. Infine esiste una terna $i < j < k$ tale che $x_i \equiv x_j \equiv x_k \pmod 2$ e quindi N è sempre divisibile per 4. In conclusione N è sempre divisibile per 300.

Nota: mettendo più attenzione alle classi di resto modulo 2 e 3, il ragionamento su esposto mostra in realtà che N è sempre divisibile per $5^2 3^5 2^{12} = 6^1 5^2 4^3 3^4 2^5$. Più in generale, è sempre vero che per ogni successione di interi $x_1, \ldots, x_n$, il prodotto $\prod_{i>j}(x_i - x_j)$ è divisibile per $(n-1)(n-2)^2 \cdots 2^{n-1}$; la dimostrazione è tutt'altro che banale e richiede il determinante di Vandermonde, argomento trattato di norma negli insegnamenti universitari.