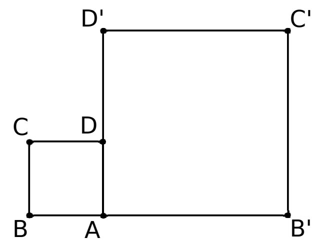
GARA INDIVIDUALE DI MATEMATICA

21 aprile 2016

Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM.FF.NN – Sapienza Università di Roma.

Ogni esercizio fornisce il punteggio massimo indicato; i primi due quesiti devono essere consegnati entro la prima ora.

Quesito 1. *(8 punti – consegnare entro la prima ora)*
Si considerino due quadrati adiacenti come in figura, e sia P il punto di intersezione, diverso da A, delle due circonferenze a loro circoscritte. Siano r ed r' le rette su cui giacciono, rispettivamente, i segmenti BD' e $B'D$. Dimostrare o confutare la seguente affermazione: *le rette r ed r' si intersecano in P.*

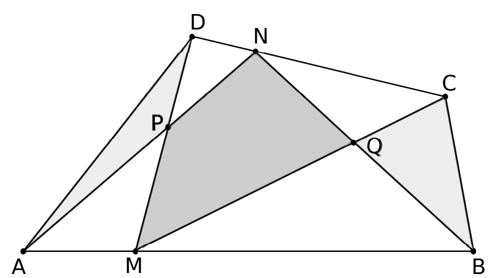


Quesito 2. *(9 punti – consegnare entro la prima ora)*
Quante sono le terne ordinate (a, b, c) di numeri razionali positivi tali che i tre numeri

$$a + b + c, \quad \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}, \qquad 2abc,$$

siano tutti interi? (Nota: come terna ordinata, $(1, 3, 3)$ è considerata diversa da $(3, 1, 3)$.)

Quesito 3. *(10 punti)*
Si consideri un quadrilatero convesso $ABCD$, e siano M, N due punti rispettivamente sui lati AB e CD, che dividono tali lati nello stesso rapporto, cioè: $MB/AB = NC/DC = r$. Siano inoltre P l'intersezione di AN con DM, e Q l'intersezione di CM con BN. Dimostrare o confutare la seguente affermazione: *l'area del quadrilatero $PNQM$ è uguale alla somma delle aree dei triangoli ADP e BCQ.*



Quesito 4. *(11 punti)*

Dimostrare che valgono le seguenti disuguagliane: $2 < \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\cdots\sqrt{2014\sqrt{2015\sqrt{2016}}}}}}} < 3$

Progetto Olimpiadi della Matematica
Sezione di Roma

www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi