Roma, 8 marzo 2016

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
UMI Unione Matematica Italiana
INDAM Istituto Nazionale di Alta Matematica
Progetto Lauree Scientifiche

Quesito 1. In un problema di astronomia, Maria Mitchell analizza quattro parametri tali che $a < b < c < d$. Chiamati $x = (a - b)(c - d)$, $y = (a - c)(b - d)$, $z = (a - d)(b - c)$, Maria può dedurre che:

(A) $x < y < z$
(B) $x < z < y$
(C) $y < x < z$
(D) $z < x < y$
(E) $z < y < x$
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 2. Zaha Adid sta progettando un nuovo straordinario edificio ottenuto come due grandi sfere di raggi $15\,m$ e $20\,m$ che si intersecano perpendicolarmente. Sia X il valore del volume della parte comune alle due sfere. La differenza fra il volume delle due parti rimanenti, espressa in m^3, è:

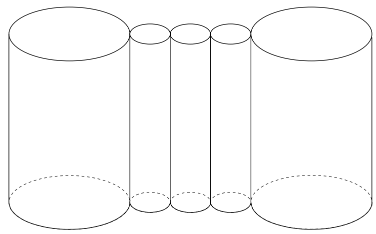
(A) $\frac{4}{3}X$
(B) 4625π
(C) $4625\pi X$
(D) $4625\pi/2$
(E) $\frac{18500}{3}\pi$
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 3. Samantha Cristoforetti al suo rientro sulla terra vuole gustarsi un buon succo di frutta. Trova una bevanda di albicocca contenente solo il 20% di succo vero. A un litro della bevanda aggiunge succo puro in modo che la nuova bevanda contenga il 40% di succo. Dopo di che aggiunge acqua, riportando la concentrazione del succo al 20%. A quale intervallo appartiene il volume V finale della bevanda?

(A) $1,2\,l < V \leq 1,3\,l$
(B) $1,3\,l < V \leq 1,4\,l$
(C) $2,4\,l < V \leq 2,6\,l$
(D) $2,6\,l < V \leq 2,8\,l$
(E) $2,8\,l < V \leq 3,0\,l$
(F) nessuna delle precedenti

Questo testo e le relative soluzioni dei quesiti sono disponibili alla pagina web `www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi/`

Quesito 4. Emma Strada deve progettare due tipi di ammortizzatori cilindrici, di altezza $3\,dm$, basi circolari di raggi rispettivamente r ed R, e volume totale (di un ammortizzatore di raggio R più un ammortizzatore di raggio r) uguale a $10\,dm^3$. Sapendo che gli ammortizzatori saranno disposti in serie come in figura, e che la distanza tra i centri delle basi più grandi deve essere uguale a $4\,dm$, quante possibilità ha Emma nella scelta del raggio maggiore R?



(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 5. Lise Meitner, vicina a un'importante scoperta sulla fissione nucleare, ha bisogno di sapere quante sono tutte le soluzioni intere del sistema

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1, \end{cases}$$

cioè: quante sono le quaterne ordinate (x, y, z, t) in cui x, y, z, t sono numeri interi (positivi, negativi o nulli) che soddisfano il sistema?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4
(F) infinite

Quesito 6. Emma Lehmer, Julia Robinson e Ruth Moufang stanno facendo un gioco da tavola, in più giri, che prevede 3 giocatori. I punti per il primo, il secondo e il terzo posto in ciascun giro sono numeri interi prefissati, tutti maggiori di zero, distinti fra loro e tali che la vincitrice abbia il punteggio maggiore e l'ultima il minore. Julia ha vinto il secondo giro. Il risultato finale è stato: Emma 20 punti, Julia 10 punti, Ruth 9 punti. È possibile determinare quanti punti Ruth ha ottenuto nell'ultimo giro?

(A) Sì, 1
(B) Sì, 2
(C) Sì, 3
(D) Sì, 4
(E) Sì, 5
(F) No

Quesito 7. Ipazia di Alessandria si imbatte nel seguente problema del trattato *Aritmetica* di Diofanto: per quanti interi n con $1 \leq n \leq 221$ il numero $n^2 - 3n + 2$ è un multiplo di 221?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4
(F) 5

Quesito 8. La nazionale femminile di calcio statunitense ha un organico di 20 giocatrici, così composto: 2 donne da mandare in porta, 6 per la difesa, 6 per il centrocampo e 6 attaccanti. La sua allenatrice Jillian Ellis è una fanatica del 4-3-3, a cui non è disposta a rinunciare per nessun motivo. Alla vigilia del debutto in campionato è tormentata però dai dubbi sulla formazione da schierare. Sapreste aiutarla suggerendole tra quante formazioni diverse deve scegliere le 11 titolari? (Si considerano diverse due formazioni che differiscano per almeno una giocatrice, non quelle in cui le stesse giocatrici sono schierate diversamente.)

(A) 36
(B) 72
(C) 240
(D) 624
(E) 8400
(F) 12000

Quesito 9. Rosalind Franklin e Dorothy Crowfoot Hodgkin, in una pausa tra un esperimento e un altro coi raggi X, si divertono a produrre coppie (a, b) di numeri interi positivi, utilizzando per ciascuna coppia le cifre da 1 a 9 una e una sola volta. Fra le $8 \times 9!$ combinazioni possibili, quante soddisfano l'equazione $a^3 = b$?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 9
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 10. Maria Gaetana Agnesi è immersa in un problema di geometria per terminare l'ultimo capitolo del suo nuovo libro: fra tutti i quadrilateri convessi non degeneri di vertici, in senso antiorario, dati da A, B, C, D tali che $AD = AC = BC = 13$ e con tutti i lati di lunghezza intera, siano Q_{max} quello di perimetro massimo e Q_{min} quello di perimetro minimo. Quanto vale il rapporto tra le rispettive aree $\frac{\text{Area}(Q_{max})}{\text{Area}(Q_{min})}$?

(A) $2\sqrt{3}$
(B) 13
(C) $\frac{120}{13\sqrt{3}}$
(D) $\frac{169}{15}$
(E) $\frac{5}{3}\sqrt{17}$
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 11. Dona Bayley inventa il nuovo videogioco Flea, in cui una pulce può saltare sui vertici di un dodecaedro (un poliedro regolare che ha 12 facce pentagonali e 20 vertici da ognuno dei quali si dipartono 3 spigoli). Sapendo che la pulce parte da un vertice V del dodecaedro e può muoversi solo saltando da un vertice a uno qualsiasi dei tre adiacenti, quanti salti le sono necessari, come minimo, per visitare tutti gli altri vertici e tornare in V?

(A) 20
(B) 24
(C) 25
(D) 32
(E) 60
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 12. Sonia Kovalevskaja formalizza un problema sulla rotazione di un corpo rigido tramite il polinomio $p(x) = x^3 - 2016x^2 + bx + c$ con radici tutte reali. Con quante cifre decimali si scrive il massimo valore possibile di b?

(A) 1
(B) 2
(C) 5
(D) 7
(E) 8
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 13. La grande archeologa ed esploratrice Doris Stone scopre un'iscrizione che potrebbe dimostrare un legame tra civiltà latina e quelle precolombiane. L'iscrizione rappresenta un'equazione in cui a ogni lettera corrisponde una cifra tra 0 e 9, e a lettere diverse corrispondono cifre diverse:

$$\frac{IPPIIP}{ROMA} = PI.$$

A che numero corrisponde $ROMA$?

Quesito 14. Sophie Germain ha 15 punti da attribuire per il compito scritto assegnato ai suoi studenti: decidendo che ogni esercizio valga almeno 1 punto, in quanti modi possibili Sophie può distribuirli tra i quattro esercizi A, B, C, D del compito?

Quesito 15 Dieci matematiche si ritrovano a un convegno e durante un *coffee break* si mettono a giocare a nascondino. Vera Sòs, la più grande di tutte loro, è più lenta nei movimenti e fa un po' fatica a nascondersi bene, quindi perde 1 volta su 3. Le due amiche del cuore Maria Chudnovsky e Fan Chung, invece, conoscono un nascondiglio formidabile e non perdono mai. Le altre 7 giocatrici hanno le stesse abilità nel poter giocare. In ogni partita c'è una giocatrice che fa la conta e c'è sempre una perdente, diversa da quella che fa la conta; chi perde, si mette a contare alla partita successiva. La prima a fare la conta del gruppo è Maryam Mirzakhani. Se si indica con p la probabilità che alla quarta partita sia di nuovo Maryam a contare, quali sono le prime 4 cifre decimali significative dopo la virgola di p?