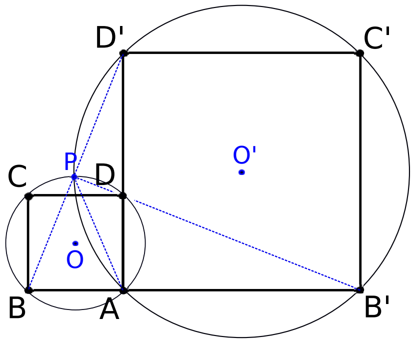
GARA INDIVIDUALE DI MATEMATICA
21 aprile 2016

Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM.FF.NN. – Sapienza Università di Roma.

Quesito 1. *Le rette r ed r' si intersecano in P.*
Siano O ed O' i centri delle circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ circoscritte rispettivamente a $ABCD$ e $AB'C'D'$.
Mostriamo innanzitutto che P appartiene ad r, verificando che B, P, D' sono allineati.



In effetti, l'angolo $\widehat{D'PB'} = \frac{\pi}{2}$, poiché $D'B'$ è un diametro; per mostrare che B, P, D' sono allineati basta allora mostrare che anche $\widehat{BPB'} = \frac{\pi}{2}$.
Ora, $\widehat{BOA} = \frac{\pi}{2}$, e dunque $\widehat{BPA} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \frac{\pi}{4}$ (poiché sottende la corda BA su $\mathcal{C}$, dalla stessa parte di O); analogamente, $\widehat{B'PA} = \frac{1}{2}\widehat{B'O'A} = \frac{\pi}{4}$. Dunque $\widehat{BPB'} = \widehat{BPA} + \widehat{B'PA} = \frac{\pi}{2}$, e B, P, D' sono effettivamente allineati.
Per concludere, basta mostrare che P appartiene anche ad r', verificando cioè che P, D, B' sono allineati.
Sappiamo già che $\widehat{D'PB'} = \frac{\pi}{2}$; basta verificare allora che anche $\widehat{D'PD} = \frac{\pi}{2}$. Ora, $\widehat{D'PD} = \widehat{D'PA} - \widehat{DPA}$; inoltre $\widehat{D'PA} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ (poiché sottende il lato $D'A$ su $\mathcal{C}'$, dalla parte opposta di O'), mentre $\widehat{DPA} = \frac{\pi}{4}$ (poiché sottende DA su $\mathcal{C}$, dalla stessa parte di O). Quindi vale effettivamente $\widehat{D'PD} = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Quesito 2. *Ci sono tre terne:* $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ *e* $(2, 2, 1)$.
L'osservazione fondamentale è che

$$(2abc)\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}\right) = ab + ac + bc.$$

Quindi, il polinomio $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$ ha coefficienti interi, a parte il termine noto che è un intero o un semi-intero (ossia metà di un intero dispari).
Il polinomio $Q(x) = 2P(x) = 2x^3 + \cdots - 2abc$ ha le stesse radici a, b, c, ma coefficienti tutti interi: per il teorema delle radici razionali di un polinomio a coefficienti in $\mathbb{Z}$, le sue radici razionali sono del tipo p/q con p che divide il termine noto e q che divide il coefficiente del termine di grado massimo: ne segue che a, b, c sono degli interi oppure dei semi-interi. Dato che $a+b+c$ è intero, i numeri a, b, c sono interi, oppure esattamente due di essi sono semi-interi; ma nel secondo caso $ab + ac + bc$ non sarebbe intero, quindi a, b, c devono essere tutti interi.
Dunque le soluzioni corrispondono alle terne di interi positivi tali che

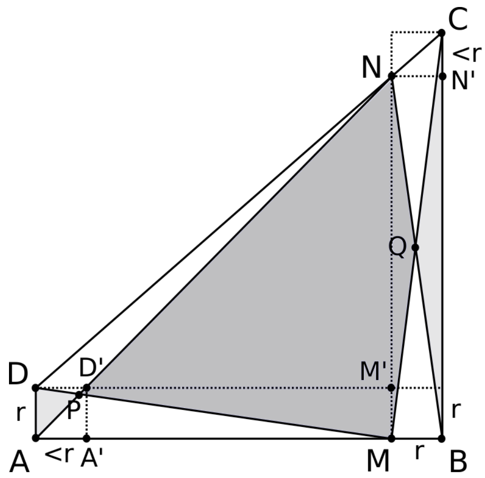
$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$$

è ancora intero. A meno di permutazioni possiamo supporre $a \le b \le c$, da cui segue $a = 1$, altrimenti la somma sarebbe inferiore a $\frac{3}{4}$ e non intera. Di conseguenza

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

deve essere un intero positivo dispari; quest'ultima condizione implica $b = c = 2$.

Quesito 3. *L'area di $PNQM$ non è in generale uguale alla somma delle aree di ADP e di BCQ.*
Questo è intuibile prendendo A molto vicino a D, ed r molto piccolo. Per un controesempio esplicito, consideriamo come quadrilatero un trapezio rettangolo in B con altezza $AB = 1$ e basi $BC = 1$, $AD = r$ come in figura. In tal caso, per il teorema di Talete, il segmento NM è parallelo alle basi.



Sia inoltre s la retta parallela a AB passante per D, e siano M' e D' rispettivamente le intersezioni di MN, AN con s; chiamiamo infine A' e N' le proiezioni di D' e N rispettivamente su AB e su BC. La pendenza di DN è inferiore a 45° (poiché $\overline{NM'} < \overline{DM'}$) e quella di AN superiore a 45° (poiché $\overline{N'C} < r$, dunque $\overline{MN} > 1 - r = \overline{AM}$). Ne segue che $\overline{DD'} < r$. Dato che il quadrilatero $PNQM$ contiene il triangolo rettangolo $D'M'N$ vale allora

$$\mathcal{A}(PNQM) \geq \mathcal{A}(D'M'N) > \frac{1}{2}(1-2r)^2.$$

Le aree dei due triangoli ADP e BCQ verificano invece $\mathcal{A}(ADP) < \frac{1}{2}r^2$ e $\mathcal{A}(BCQ) < \frac{1}{2}r$.
Poiché $\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2}r < \frac{1}{2}(1-2r)^2$ per r piccolo, non può dunque valere l'uguaglianza $\mathcal{A}(PNQM) = \mathcal{A}(ADP) + \mathcal{A}(BCQ)$.

Quesito 4.
Dimostriamo per induzione (discendente) che se $2 \leq m \leq 2016$ vale

$$y_m = \sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{(m+2)\sqrt{\cdots\sqrt{2015\sqrt{2016}}}}}} < m+1.$$

In effetti, per $m = 2016$ tale disuguaglianza è banale; ammettendo che essa sia vera per y_{k+1}, otteniamo

$$y_k = \sqrt{k y_{k+1}} < \sqrt{k(k+2)} < k+1$$

e dunque la disuguaglianza è vera per ogni $2 \leq m \leq 2016$. Ne deduciamo che $y_2 = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{2015\sqrt{2016}}}}} < 3$.
Mostriamo ora che $y_2 > 2$. Infatti, se per assurdo $y_2 \leq 2$, quadrando ambo i membri di questa disequazione e semplificando, otterremmo

$$y_3 = \sqrt{3\sqrt{4\sqrt{5\sqrt{6\sqrt{\cdots\sqrt{2015\sqrt{2016}}}}}}} \leq 2$$

$$y_4 = \sqrt{4\sqrt{5\sqrt{6\sqrt{\cdots\sqrt{2015\sqrt{2016}}}}}} \leq \frac{4}{3} < 2$$

$$y_5 = \sqrt{5\sqrt{6\sqrt{\cdots\sqrt{2015\sqrt{2016}}}}} < \frac{4}{5} < 1$$

e dunque $y_m < 1/(m-1) < 1$ per ogni $m \geq 6$; questo è assurdo in quanto $y_{2016} = \sqrt{2016} > 1$.