Roma, 8 marzo 2016

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:

UMI Unione Matematica Italiana
INDAM Istituto Nazionale di Alta Matematica
Progetto Lauree Scientifiche

SOLUZIONI[1]

Quesito 1. Risposta (F): Nessuna delle precedenti.
È immediato accorgersi che se b è circa uguale a c, $b = a+1$ e $d = c+1$, si ottiene z circa uguale a 0 mentre $x = 1$: questo esclude tutte le risposte con $x < z$. Analogamente, se b è circa uguale ad a, $c = b+1$ e $d = c+1$, si ottiene x circa uguale a 0, mentre z è circa 2: questo esclude le risposte con $z < x$. Pertanto l'unica risposta possibile è (F). Le due situazioni su descritte possono presentarsi per esempio con $a = 2,9; b = 3,9; c = 4; d = 5$ per il primo caso e $a = 2; b = 2,1; c = 3,1; d = 4,1$ per il secondo caso.

Quesito 2. Risposta (E): $\frac{18500}{3}\pi$.
Il volume della sfera più grande, meno la parte comune, è $\frac{4}{3}\pi r_1^3 - X$, dove $r_1 = 20$; il volume della sfera più piccola, meno la parte comune, è $\frac{4}{3}\pi r_2^3 - X$, dove $r_2 = 15$; quindi la differenza di volumi tra le due parti rimanenti è $\frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3) = \frac{18500}{3}\pi$.

Quesito 3. Risposta (D): il volume V è compreso nell'intervallo $2,6\,l < V \leq 2,8\,l$.
Siano V_1 e V_2 rispettivamente la quantità di succo puro e di acqua, in centilitri, che si aggiungono alla bevanda. Si ha:

$$\frac{20+V_1}{100+V_1} = \frac{40}{100} \quad \text{e} \quad \frac{20+V_1}{100+V_1+V_2} = \frac{20}{100},$$

da cui si deduce $V_1 = \frac{100}{3}$ e $V_2 = 4V_1$. Il volume finale è dunque $V = 100 + V_1 + V_2 = \frac{800}{3} \approx 266,6$ centilitri.

Quesito 4. Risposta (B): 1 possibilità.
Poiché il volume di un cilindro di raggio r e altezza h vale $\pi r^2 h$, si tratta di risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 3\pi(R^2+r^2) = 10 \\ R + 3r = 2. \end{cases}$$

Tale sistema si può risolvere algebricamente (con un po' di calcoli a mano...). È più semplice però notare che la prima equazione rappresenta, nel piano cartesiano (r, R), una circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{10}{3\pi}} > 1$, mentre la seconda rappresenta una retta di coefficiente angolare -3 e intercetta 2. Poiché tale retta interseca l'asse delle r nel punto $r = \frac{2}{3} < 1$, la retta ha un punto di intersezione (r, R) con la circonferenza nel I quadrante, e un punto di intersezione nel IV quadrante (soluzione da scartare in quanto corrispondente a un raggio R negativo). Emma Strada ha dunque una sola possibilità nella scelta di R.

Quesito 5. Risposta (E): Le quaterne possibili sono 4.
Si trova facilmente che (z, t) non può essere $(0, 0)$ e che y deve essere uguale a $\frac{(z-3t)}{(2t^2+z^2)}$. Poiché

[1] Il presente file può essere scaricato dalla pagina web `www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi/`

y deve essere intero e $\frac{(z-3t)}{(2t^2+z^2)}$ è in modulo minore di $\frac{3}{\sqrt{t^2+z^2}}$, si trova che, se z è diverso da $3t$, allora ci sono solo un numero finito (e piccolo) di casi possibili perché $\frac{(z-3t)}{(2t^2+z^2)}$ possa essere intero, e si vede facilmente controllandoli uno ad uno che le uniche due possibilità sono $(z,t)=(1,0)$ e $(z,t)=(-1,0)$: tali valori portano alle quaterne $(3,1,1,0)$ e $(-3,-1,-1,0)$; per $z=3t$ si trovano invece le altre due quaterne.

Alternativamente: il sistema è equivalente alla seguente singola equazione complessa, dove i è l'unità immaginaria:

$$(x+i\sqrt{2}y)(z+i\sqrt{2}t)=3+i\sqrt{2}\,:$$

basta uguagliare separatamente parte reale e parte immaginaria per ottenere il sistema dato.

Ricordando che il modulo del prodotto di due numeri complessi è uguale al prodotto dei loro moduli, uguagliando i moduli dei due membri otteniamo:

$$(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11,$$

quindi $x^2+2y^2=1$ oppure $z^2+2t^2=1$, dal momento che 11 è un numero primo. Nel primo caso otteniamo $x=\pm 1, y=0$, che porta alle due soluzioni: $(1,0,3,1)$ e $(-1,0,-3,-1)$. Nel secondo caso $=\pm 1, t=0$, che porta alle altre due soluzioni$(3,1,1,0)$ e $(-3,-1,-1,0)$.

Quesito 6. Risposta (D): i punti assegnati a Ruth sono 4.
I punti distribuiti in ciascun giro devono essere almeno $6=(1+2+3)$. In totale sono stati distribuiti 39 punti. $39=39\times 1$ oppure 3×13. Dal momento che è stato fatto più di un giro, necessariamente i giri sono stati 3 e in ciascuno di essi sono stati distribuiti 13 punti. Julia ha vinto il secondo giro, e ha avuto almeno un punto negli altri due giri, dunque la vincitrice di un giro può ottenere al massimo 8 punti. Supponiamo allora che la vincitrice di un giro ottenga 7 punti. Dal momento che Emma ha 20 punti, deve aver vinto due giri ed essere arrivata seconda al secondo giro, con $20=(7+6+7)$. Ma se la prima e la seconda classificata di un giro avessero rispettivamente 7 e 6 punti, non rimarrebbe nulla per la terza di un giro. Quindi rimane solo l'ipotesi che la vincitrice ottenga 8 punti. Questo comporta che Julia, che ha vinto il secondo giro, è arrivata ultima negli altri due giri, ottenendo un punto in ciascuno. Dunque la seconda classificata di un giro ottiene $13-8-1=4$ punti. Emma ha vinto due giri ed è arrivata seconda al secondo giro, Ruth è arrivata seconda al primo e all'ultimo giro, ottenendo in ciascuno 4 punti.

Quesito 7. Risposta (E): ci sono 4 numeri distinti: $n=1,2,53,171$.
Si trovano esattamente quattro valori di n. Bisogna infatti stabilire per quali valori di $1\le n\le 221$ il numero $n^2-3n+2=(n-1)(n-2)$ sia divisibile per $221=13\cdot 17$. Questo accade quando uno dei fattori $n-1, n-2$ è divisibile per 221, oppure quando uno dei due è divisibile per il primo 13, e l'altro è divisibile per il primo 17.

Ricordando che n è compreso tra 1 e 221, $n-1$ è multiplo di 221 solo se $n-1=0$; allo stesso modo $n-2$ è multiplo di 221 solo se $n-2=0$. Di conseguenza, i valori $n=1,2$ esauriscono i primi due casi.

Gli altri due casi si hanno se $(n-1)$ è multiplo di 13 e $(n-2)$ è multiplo di 17 , oppure $(n-1)$ è multiplo di 17 e $(n-2)$ è multiplo di 13 .

Elenchiamo i multipli di 13 , cui sommiamo 1, fino a 221:

$$14,27,40,53,66,79,92,105,118,131,144,157,170,183,196,209,(222)$$

e i multipli di 17, cui sommiamo 2 fino a 221:

$$19,36,53,70,87,104,121138,155,172,189,206,(223).$$

Elenchiamo poi i multipli di 13, cui sommiamo 2, fino a 221:

$$16,29,42,55,68,81,93,106,119,132,145,158,171,184,197,210,(223)$$

e i multipli di 17, cui sommiamo 1, fino a 221:

$$18,35,52,69,86,103,120,137,154,171,188,205,(222).$$

Confrontando le liste,

(1) per $n = 53$, $n - 1 = 52 = 13 \cdot 4$ e $n - 2 = 51 = 17 \cdot 3$ sono rispettivamente multipli di 13 e 17, quindi

$$(n-1)(n-2) = 52 \cdot 51 = (13 \cdot 4) \cdot (17 \cdot 3) = 221 \cdot 12;$$

(2) per n= 171, $n - 1 = 170 = 17 \cdot 10$ e $n - 2 = 169 = 13 \cdot 13$ sono rispettivamente multipli di 17 e 13, quindi

$$(n-1)(n-2) = 170 \cdot 169 = (1 \cdot 10) \cdot (13 \cdot 13) = 221 \cdot 130.$$

Non vi sono altri casi possibili.

Nota Se si conoscono il linguaggio delle congruenze e il Teorema cinese dei resti, richiedere che $n - 1$ sia multiplo di 13 e $n - 2$ lo sia di 17 equivale a risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} n \equiv 1 \mod 13 \\ n \equiv 2 \mod 17, \end{cases}$$

che, per il Teorema cinese dei resti, ha un'unica soluzione modulo $13 \cdot 17 = 221$. Esiste quindi una sola scelta di $1 \leq n \leq 221$ che risolve il sistema: svolgendo i conti, si trova $n = 53$.

Allo stesso modo, il sistema

$$\begin{cases} n \equiv 2 \mod 13 \\ n \equiv 1 \mod 17, \end{cases}$$

conduce alla soluzione $n = 171$. I quattro valori richiesti sono quindi $n = 1, 2, 53, 171$.

Quesito 8. Risposta (F): 12000 formazioni diverse.
Il numero di possibili scelte di 4 giocatrici in difesa tra le 6 in organico è il coefficiente binomiale $\binom{6}{4} = 15$; il numero di scelte di 3 giocatrici tra le 6 per il centrocampo (o 3 attaccanti tra 6) è $\binom{6}{3} = 20$. Essendoci 2 scelte distinte per le portiere, il totale di formazioni possibili è: $2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 20 = 12000$.

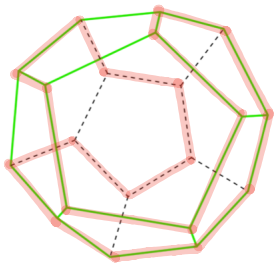
Quesito 9. Risposta (A): 0, nessuna soluzione.
Supponiamo che il numero a sia di k cifre, con $k = 1, \ldots, 9$. Ciò significa che $10^{k-1} \leq a < 10^k$, quindi $10^{3k-3} \leq a^3 < 10^{3k}$ e a^3 è formato da un numero di cifre uguale a $3k-2, 3k-1$ oppure $3k$. Basta adesso osservare che per a di k cifre, b deve avere $9 - k$ cifre e nessuna delle tre equazioni

$$9 - k = 3k - 2, \qquad 9 - k = 3k - 1, \qquad 9 - k = 3k$$

ammette soluzioni intere.

Quesito 10. Risposta (E): $A(Q_{max})/A(Q_{min}) = \frac{5}{3}\sqrt{17}$.
Il quadrilatero ABCD può vedersi come unione di due triangoli ACD e ACB con in comune il lato AC, di lunghezza fissata. Il perimetro massimo si ottiene massimizzando i perimetri di entrambi i triangoli: ciò avviene rispettivamente quando CD e AB sono massimi (essendo le lunghezze di AD e AC fissate nel primo triangolo, e le lunghezze di AC e BC fissati nel secondo). Poiché le lunghezze dei lati devono essere interi m, n non nulli (altrimenti il quadrilatero è degenere) il perimetro massimo si ottiene quando i due triangoli sono isosceli di base $m = n = 25$ e lati $AC = AD = BC = 13$; dal teorema di Erone deduciamo: $A(Q_{max}) = 2\frac{m}{2}\sqrt{(13 + \frac{m}{2})(13 - \frac{m}{2})} = \frac{25}{2}\sqrt{51}$
Il perimetro minimo si ottiene invece quando i due triangoli sono isosceli di base $m = n = 1$; l'area corrispondente è: $A(Q_{min}) = 2\frac{m}{2}\sqrt{(13 + \frac{m}{2})(13 - \frac{m}{2})} = \frac{15}{2}\sqrt{3}$. Il rapporto cercato è dunque $A(Q_{max})/A(Q_{min}) = \frac{5}{3}\sqrt{17}$.

Quesito 11. Risposta (A): 20.
È sufficiente dare una rappresentazione del dodecaedro come un grafo, quindi ragionare sul grafo. Per esempio, il seguente cammino riportato im grassetto in figura è un cammino di 20 salti che tocca tutti i vertici.



Quesito 12. Risposta (D): 7 cifre.
Siano x, y, z le radici reali (eventualmente coincidenti). Si ha $x + y + z = 2016$ mentre $b = xy + yz + xz = \frac{1}{2}[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)]$. Ora, la media aritmetica di tre numeri è inferiore o uguale alla media quadratica, cioè $\frac{1}{3}(x + y + z) \leq \sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)}$ e dunque

$$b \leq \frac{1}{2}[(x + y + z)^2 - \frac{1}{3}(x + y + z)^2)] = \frac{1}{3}(x + y + z)^2 = \frac{1}{3}2016^2 = 3 \cdot (672^2).$$

Notiamo inoltre che $x = y = z = 672$ sono le uniche radici reali del polinomio

$$(x - 672)^3 = p(x) = x^3 - 2016x^2 + 3 \cdot (672^2)x - 672^3.$$

Dunque il massimo possibile per b è proprio $3 \cdot (672^2) = 1354752$. Il numero di cifre decimali di b è dunque 7.

Quesito 13. Risposta: 5169
Abbiamo ovviamente

$$ROMA = \frac{IPPIIP}{PI}.$$

Quindi

$$ROMA = \frac{IPPIIP}{PI} = \frac{10000 \cdot IP + 100 \cdot PI + IP}{PI} = \frac{10001 \cdot IP}{PI} + 100\cdot$$

La scomposizione in fattori primi di 10001 fornisce $73 \cdot 137$.

- PI deve dividere $IP \cdot 73 \cdot 137$.
- Poiché PI è un numero a due cifre, se ha fattori in comune con $73 \cdot 137$ deve essere 73. Escludiamo ora ogni altro caso.
- Se PI non ha fattori in comune con $73 \cdot 137$, allora PI divide IP, e quindi $IP - PI = 9(I - P)$. Pertanto si tratta di un numero di due cifre che si ottiene moltiplicando per 3 o per 9 il numero positivo $I - P$, che è al più 9.
- Gli unici numeri che si ottengono in tal modo, che abbiano la prima cifra inferiore alla seconda, sono 12, 15, 18, 24, 27, 36, 45, e si escludono tutti facilmente, perché in questi casi PI non divide IP.

In conclusione PI è 73 e quindi

$$ROMA = 137 \cdot 37 + 100 = 5169.$$

Quesito 14. Risposta: 364 quaterne.
Scriviamo 15 come somma di quindici volte 1:

$$15 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Se sostituiamo 3 fra i 14 simboli di somma "+" con una virgola, otteniamo una delle distribuzioni (a, b, c, d) di punti assegnati ai quattro esercizi A, B, C, D da contare. Per esempio sostituendo il terzo, sesto e tredicesimo "+" con una virgola "," avremo costruito la quaterna

$$(a, b, c, d) = (1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1) = (3, 3, 7, 2)$$

la cui somma fa 15. Ogni quaterna la cui somma è 15 viene individuata univocamente scegliendo un sottoinsieme di tre "+" fra i 14 "+" iniziali. Perciò vi sono in tutto tante quaterne quante il coefficiente binomiale $\binom{14}{3} = \frac{14\cdot 13\cdot 12}{3!} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364$.

Quesito 15 Risposta: 1046

Notiamo innanzitutto che la presenza o meno di Maria e Fan è ininfluente per decidere le probabilità che hanno le altre 8 ragazze di partecipare all'n-mo giro di nascondino. Calcoliamo allora preliminarmente la probabilità V_n che Vera, al giro n-simo, sia in tana a fare la conta: si ha $V_1 = 0$ (poiché comincia Maryam), $V_2 = \frac{1}{3}$, $V_3 = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ (poiché Vera partecipa al secondo giro con probabilità $\frac{2}{3}$), e in generale $V_n = 1 - V_{n-1}$ oscilla tra un po' meno e un po' più di $\frac{1}{4}$. Notiamo quindi che, quando è Vera a contare, la probabilità che ha Maryam di perdere con le altre ragazze, ugualmente brave, è $\frac{1}{7}$; mentre se Vera partecipa nascondendosi, la probabilità che ha Maryam di perdere (se non è lei a contare) è di $(\frac{2}{3})/6 = \frac{1}{9}$. Calcoliamo ora la probabilità M_n che Maryam sia alla conta al giro n-simo: si ha $M_1 = 1$, $M_2 = 0$ (poiché chi conta a un giro, partecipa al successivo), $M_3 = \frac{1}{7}V_2 + (1 - V_2)\frac{1}{9} = \frac{25}{7\cdot 3^3}$ (poiché Maryam partecipa sicuramente al secondo giro). Per calcolare M_4, consideriamo i tre possibili casi (che non si verificano mai contemporaneamente) in cui:

A) Maryam conta al terzo giro;

B) Vera conta al terzo giro

C) Maryam e Vera partecipano entrambe al terzo giro.

Nel caso A), la probabilità che Maryam faccia la conta al quarto giro è nulla. Nel caso B) (che accade con probabilità $V_3 = \frac{2}{9}$), la probabilità che Maryam perda, e quindi conti al quarto giro, è $\frac{1}{7}$. Nel caso C) la probabilità che Maryam perda è $\frac{1}{9}$; calcoliamo quindi la probabilità che si verifichi il caso C). Poiché Maryam partecipa al secondo giro, il caso C) si presenta se e solo se si verificano una delle due (mutualmente esclusive) possibilità:

- Vera conta al secondo giro e in tal giro Maryam non perde; ciò avviene con probabilità $q_1 = V_2 \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{7}$;
- Vera partecipa al secondo giro e in tal giro non perdono né Maryam né Vera; ciò avviene con probabilità $q_2 = (1 - V_2) \cdot (\frac{2}{3} + \frac{1}{9}) = \frac{10}{27}$.

Pertanto $q = q_1 + q_2 = \frac{124}{7\cdot 3^3}$ e sommando le probabilità che Maryam conti al quarto giro, condizionate ai casi A), B), C) risulta: $M_4 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{7} + q \cdot \frac{1}{9} = \frac{178}{7\cdot 3^5} = 0,104644\ldots$.