Roma, 7 marzo 2017

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
UMI Unione Matematica Italiana Progetto Lauree Scientifiche

Quesito 1. Sia P il punto di contatto di due circonferenze tangenti $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_1$ di centri rispettivamente O_1 e O_2. Una retta a passante per P interseca le due circonferenze in altri due punti, detti rispettivamente A_1 su $\mathcal{C}_1$ e A_2 su $\mathcal{C}_2$; un'altra retta b, passante anch'essa per P, le interseca in altri due punti B_1 su $\mathcal{C}_1$ e B_2 su $\mathcal{C}_2$. Si considerino le circonferenze $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ passanti rispettivamente per P, A_1, B_2 e per P, A_2, B_1, e si indichino con Q e R i loro centri. I punti O_1, O_2, Q e R:

(A) formano sempre due coppie di segmenti tra loro perpendicolari
(B) giacciono sempre su una stessa circonferenza
(C) formano sempre due coppie di segmenti divisi in parti uguali da P
(D) sono sempre i vertici di un parallelogramma
(E) sono sempre vertici di un quadrilatero circoscritto a una circonferenza
(F) sono sempre i vertici di un quadrilatero che ha due angoli retti

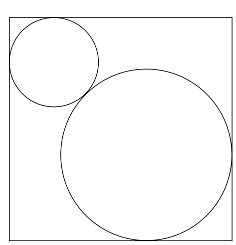
Quesito 2. Per quanti valori del parametro reale a il polinomio

$$p(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 7x + a$$

possiede 4 radici reali distinte?

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4
(F) infiniti

Quesito 3. Si considerino due cerchi tra loro tangenti esternamente, e tangenti come in figura a un quadrato di lato a. Sia S la somma delle aree dei due cerchi. Qual è il valore minimo possibile per S?



(A) $(3-\sqrt{2})\pi a^2$
(B) $\frac{(3-\sqrt{2})}{2}\pi a^2$
(C) $(\frac{3}{2}-2\sqrt{2})\pi a^2$
(D) $(3-2\sqrt{2})\pi a^2$
(E) $(2-3\sqrt{2})\pi a^2$
(F) nessuno dei precedenti

Quesito 4. La concentrazione di un prodotto farmaceutico è data dal rapporto tra soluto (il principio attivo) e soluzione. A sua volta la soluzione è data dalla somma "soluto + solvente". Un farmacista possiede dosi pronte da 250 ml di una certa preparazione farmaceutica nella concentrazione dello 0,1%. Un cliente ha bisogno di una soluzione con concentrazione dello 0,5%. Il farmacista deve allora:

(A) dare 1/5 della dose al paziente
(B) aggiungere a una dose una quantità di soluto superiore a 2,5 ml
(C) aggiungere a una dose esattamente 2,5 ml di soluto
(D) aggiungere a una dose una quantità di soluto compresa tra 1 e 2,5 ml
(E) aggiungere a una dose esattamente 1 ml di soluto
(F) aggiungere a una dose meno di 1 ml di soluto

Quesito 5. L'isola di Smullyan è abitata da cavalieri, che dicono sempre la verità, e da furfanti, che mentono sempre. Fra quattro abitanti X, Y, W, Z dell'isola di Smullyan si svolge questo dialogo:

X: "Almeno uno di noi è un cavaliere."

Y: "Almeno uno di noi è un furfante."

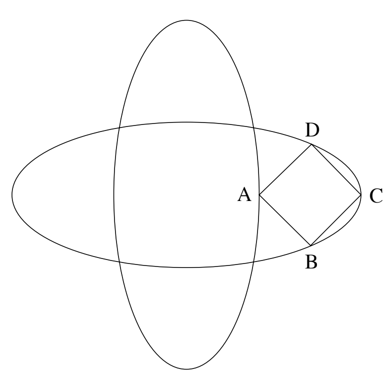
W: "Al massimo uno di noi è un cavaliere."

Z: "Al massimo uno di noi è un furfante."

Possiamo dedurre che il numero di cavalieri tra X, Y, W, e Z è:

(A) 1 oppure 2 (ma non sappiamo il numero esatto)
(B) 2 oppure 3 (ma non sappiamo il numero esatto)
(C) 3 oppure 4 (ma non sappiamo il numero esatto)
(D) esattamente 1
(E) esattamente 2
(F) esattamente 3

Quesito 6. Due ellissi identiche $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$, di semiasse maggiore a e semiasse minore b, hanno il centro in comune e gli assi maggiori ortogonali. Il quadrilatero $ABCD$ mostrato in figura ha i vertici B, C e D su $\mathcal{E}_1$ e il vertice A su $\mathcal{E}_2$. Inoltre la diagonale AC appartiene all'asse maggiore di $\mathcal{E}_1$. Sapendo che $ABCD$ è un quadrato di lato ℓ, quali delle seguenti affermazioni è vera?

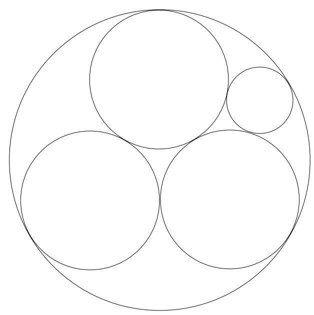


(A) $a = \sqrt{6}b$
(B) $a = (\sqrt{2}+1)b$
(C) $a = \sqrt{5}\ell$
(D) $a = (\sqrt{7}-1)\ell$
(E) $\ell = \frac{8}{9}b$
(F) $\ell = \frac{\sqrt{10}}{3}b$

Quesito 7. Giulio ha dimenticato la password del proprio computer. Tuttavia ricorda che la password è un numero di 10 cifre e ogni cifra compare esattamente una volta. Inoltre sa che se si tronca il numero alle prime $n \leq 10$ cifre (da sinistra), il numero è divisibile per n. Qual è la prima cifra (da sinistra) della password di Giulio?

(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 6
(E) 7
(F) 9

Quesito 8. In figura, il raggio del cerchio più grande misura 1. I tre cerchi di dimensione intermedia sono congruenti tra loro, tangenti a due a due e tangenti internamente alla circonferenza maggiore. Il cerchio più piccolo è tangente a due cerchi intermedi e alla circonferenza maggiore. Quanto vale il raggio della circonferenza più piccola?



(A) $\frac{1}{5}$
(B) $\frac{5-2\sqrt{3}}{7}$
(C) $\frac{5\sqrt{3}-8}{3}$
(D) $\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$
(E) $\frac{9}{40}$
(F) $\frac{1}{2}$

Quesito 9. Quante cinquine ordinate (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) di numeri reali risolvono il seguente sistema di equazioni?

$$\begin{cases} (x_3+x_4+x_5)^5 &= 3x_1 \\ (x_4+x_5+x_1)^5 &= 3x_2 \\ (x_5+x_1+x_2)^5 &= 3x_3 \\ (x_1+x_2+x_3)^5 &= 3x_4 \\ (x_2+x_3+x_4)^5 &= 3x_5 \end{cases}$$

(A) 1 cinquina
(B) 2 cinquine
(C) 3 cinquine
(D) 4 cinquine
(E) infinite cinquine
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 10. Un numero decimale finito, se convertito in un'altra base, può scriversi ancora con un numero finito di cifre dopo la virgola o diventare periodico. Sapreste dire in quali basi b (con b tra 2 e 9) il numero 0,375 si scrive con un numero finito di cifre?

(A) nessuna delle basi da 2 a 9
(B) solamente in base 7
(C) solamente nelle basi 3 e 5
(D) solamente nelle basi $2, 4, 8$
(E) tutte le basi tra 2 e 9
(F) nessuna delle precedenti

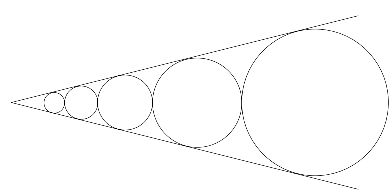
Quesito 11. Un bussolotto contiene palline distinte, numerate con gli interi da 0 a 100. Aldo deve estrarre due palline contemporaneamente dal bussolotto. Tra tutti i sorteggi in cui la somma dei due valori estratti non superi 100, qual è la probabilità che i due numeri sulle palline siano entrambi dispari?

(A) 25/102
(B) 25/101
(C) 50/101
(D) 50/100
(E) 51/101
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 12. Su una lavagna è scritto un numero n, con $1 \leq n \leq 100$. Alice e Bob fanno un gioco. Inizia Alice: sceglie un divisore di n minore di n (se non può, cioè se $n = 1$, sceglie come divisore 1), poi sottrae 1 al divisore scelto. Se in tal modo Alice ottiene 0, perde; se ottiene invece un numero maggiore di 0, lo passa a Bob, il quale ripete gli stessi passi col numero datogli da Alice, e così via. Il gioco prosegue, e il primo che ottiene 0 dopo la sottrazione perde. Per quanti diversi valori di n Alice ha una strategia vincente?

(A) 33 valori
(B) 49 valori
(C) 63 valori
(D) 65 valori
(E) 81 valori
(F) nessuna delle precedenti

Quesito 13. Cinque biglie sferiche di dimensioni differenti sono incastrate tra loro e tra le pareti interne di un cono circolare retto come in figura.



Sapendo che la più piccola ha raggio di 8 mm e la più grande ha raggio di 18 mm, qual è il raggio della terza, in millimetri?

Quesito 14. Durante una manifestazione per la pace, 40 persone decidono di fare un girotondo. Di queste, esattamente 22 tengono per mano (almeno) un uomo, ed esattamente 30 tengono per mano (almeno) una donna. Quante donne ci sono tra i 40 manifestanti?

Quesito 15. Una designer svizzera vuole creare un orologio a tiratura limitata, colorando di rosso 4 delle 12 ore sul quadrante di un orologio a lancette, e 8 di nero. Quanti orologi diversi può produrre, senza che mai due ore successive risultino di colore rosso?

Questo testo e le relative soluzioni dei quesiti sono disponibili alla pagina web: www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi/