Soluzioni.

Quesito 1. Poiché ci sono solo 7 file di posti e gli studenti sono $50 > 7 \cdot 7$, è chiaro che alla prima visione c'è necessariamente una fila in cui sono seduti almeno 8 studenti. Quindi, sempre a causa del fatto che ci sono solo 7 file, questi 8 studenti non potranno essere seduti tutti in file diverse, alla seconda visione.

Quesito 2. Sia N_k il numero di terne (a, b, c) con $a, b, c, \in A$ ed $a + b + c = k$; e indichiamo con N_k^- (rispettivamente) N_k^+ il numero di quelle tali che $a + b + c < k$ (risp. $a + b + c > k$). I numeri a, b, c sono interi positivi compresi tra 1 e 2017 se e solo se $2018-a, 2018-b, 2018-c$ hanno la stessa proprietà. Inoltre, se $a+b+c = k$, allora $(2018-a)+(2018-b)+(2018-c) = 6054-k$. Possiamo immediatamente concludere che il numero delle terne $(a, b, c) \in A$ la cui somma è k coincide con il numero delle terne $(a, b, c) \in A$ la cui somma è $6054 - k$, cioè $N_k = N_{6054-k}$.

Ma allora, se scegliamo n tale che $n = 6054 - n$, cioè $n = 6054/2 = 3027$, il numero delle terne in A la cui somma è minore di n coincide con il numero delle terne in A la cui somma è maggiore di n, cioè $N_n^- = N_n^+$.

Inoltre, per quanto appena osservato, per ogni $0 < m < 6054$ si ha anche

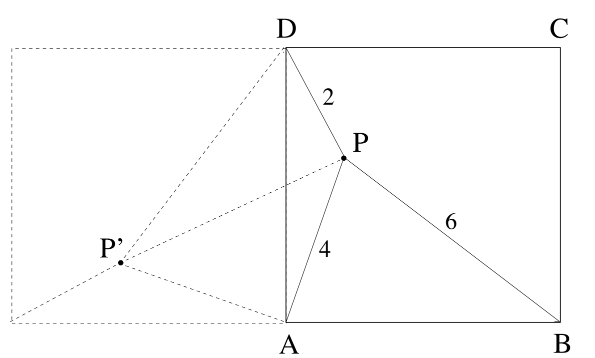
$$N_m^- = \sum_{k=1}^{m-1} N_k = \sum_{h=6054-m+1}^{6054} N_h = N_{6054-m}^+;$$

dunque per ogni $m < 3027$ vale $N_m^- = N_{6054-m}^+ < N_m^+$, in quanto la funzione N_k^+ è decrescente, mentre per ogni $m > 3027$ vale $N_m^+ = N_{6054-m}^- < N_m^-$, in quanto N_k^- è crescente. L'uguaglianza $N_k^- = N_k^+$ è possibile allora solo per il valore $k = n = 3027$.

Quesito 3. Il numero $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ è primo per il solo valore $n = 1$ poiché si fattorizza esplicitamente in $(3^n - 2^n)(3^{n+1} + 2^{n+1})$. Il fattore $3^{n+1} + 2^{n+1}$ è sempre maggiore di 1, mentre $3^n - 2^n$ lo è non appena $n > 1$.

In conclusione, se $n > 1$, il numero $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n$ è sicuramente composto. Si vede invece subito che se $n = 1$, allora $3^{2n+1} - 2^{2n+1} - 6^n = 13$, che è primo.

Quesito 4. Si consideri la figura ottenuta ruotando di $\frac{\pi}{2}$ attorno ad A il quadrato:



Questa rotazione trasforma il punto B nel punto D, ed il punto P in un punto P' tale che:

$$AP' = AP = 4, \quad DP' = BP = 6, \quad \widehat{PAP'} = \frac{\pi}{2}$$

e quindi $PP' = 4\sqrt{2}$ e $\widehat{APP'} = \frac{\pi}{4}$. Inoltre il triangolo PDP' è retto in D, poiché

$$PP'^2 + PD^2 = (4\sqrt{2})^2 + 2^2 = 36 = 6^2 = P'D^2$$

Allora $\widehat{APD} = \widehat{APP'} + \widehat{P'PD} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$.