Roma, 7 marzo 2017

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

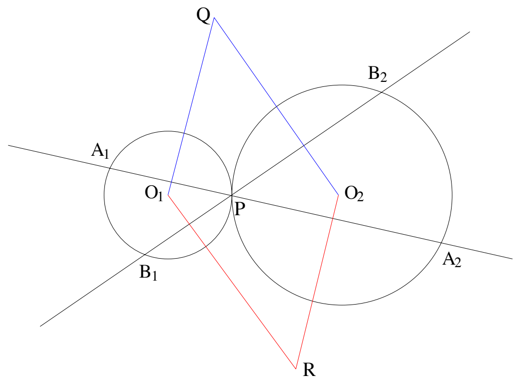
GARA A SQUADRE

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
UMI Unione Matematica Italiana Progetto Lauree Scientifiche

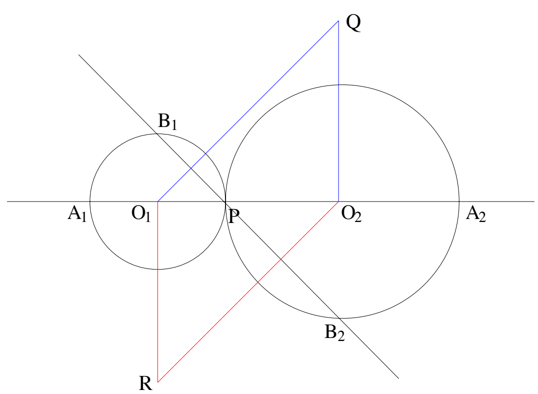
SOLUZIONI[1]

Quesito 1. Risposta (D): sono sempre i vertici di un parallelogramma.



Infatti (vedi figura sopra) i centri Q, R, delle nuove circonferenze sono rispettivamente sugli assi delle corde A_1P, B_2P e B_1P e A_2P; quindi O_1Q e O_2R sono perpendicolari alla retta A_1A_2 e analogamente per O_2Q, O_1R. Tali segmenti sono quindi a due a due paralleli e formano un parallelogramma.

Le altre risposte si escludono tutte tramite l'esempio della figura qui in basso (dove i raggi sono uno il doppio dell'altro).



Quesito 2. Risposta (A): 0.
Se $p(x) = x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 7x + a$ ha quattro radici distinte, lo stesso è vero per

$$q(x) = p(x-1) = x^4 + 3x^2 - 3x + (a-1).$$

[1] Il presente file può essere scaricato dalla pagina web `www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi/`

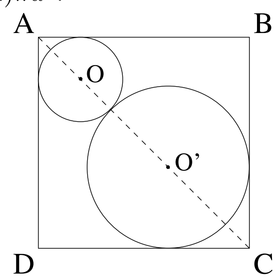
Avendo quattro radici distinte, $q(x)$ si fattorizza in $(x^2 + bx + d)(x^2 + cx + e)$, dove

$$b^2 - 4d > 0 \qquad c^2 - 4e > 0.$$

Si ricava subito $c = -b$. Da $c = -b$, le due disuguaglianze precedenti $b^2 - 4d > 0$ e $c^2 - 4e > 0$ diventano $b^2 - 4d > 0$ e $b^2 - 4e > 0$. Quindi in particolare si ha $2b^2 > 4(d + e)$. Dal prodotto sappiamo che $d + e = 3 + b^2$, dunque $2b^2 > 4(3 + b^2) = 12 + 4b^2$, ovvero $-2b^2 > 12$, che è assurdo.

Soluzione alternativa, che usa lo studio di funzioni. La derivata seconda di $p(x)$ è $12x^2+24x+18 = 12(x + 1)^2 + 6$ ed è sempre positiva. Di conseguenza la derivata prima di $p(x)$ è sempre crescente e si annulla in un solo punto. Il polinomio $p(x)$ ha quindi un unico minimo, ed è decrescente alla sua sinistra e crescente alla sua destra; può pertanto avere al più due radici reali distinte.

Quesito 3. Risposta (D): $(3 - 2\sqrt{2})\pi a^2$.



Quale che sia la scelta dei raggi del cerchio più piccolo, r, e di quello più grande, r', il punto chiave è che la loro somma sarà costante e uguale a $(2 - \sqrt{2})a$. Infatti i centri devono necessariamente trovarsi sulla diagonale e, usando le notazioni della figura, abbiamo

$$\overline{AO} + r + r' + \overline{O'C} = a\sqrt{2};$$

poiché $\overline{AO} = r\sqrt{2}$ e $\overline{O'C} = r'\sqrt{2}$, si ha

(1) $$(r + r')(1 + \sqrt{2}) = a\sqrt{2}.$$

Indicata con S la somma delle aree dei due cerchi, abbiamo dunque

$$S = \pi(r^2 + {r'}^2) = \pi[(r + r')^2 - 2rr'] = \pi[a^2(2 - \sqrt{2})^2 - 2rr'] =$$
$$= \pi[2r^2 - 2(2 - \sqrt{2})ar + (2 - \sqrt{2})^2 a^2],$$

avendo nell'ultimo passaggio sostituito $r' = a(2 - \sqrt{2}) - r$, che viene dalla (1). L'espressione così ottenuta per S è l'equazione di una parabola nella variabile r con la concavità rivolta verso l'alto: dunque il minimo S_{min} è assunto nell'ascissa del vertice della parabola, cioè $r = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a$, e vale

$$S_{min} = (3 - 2\sqrt{2})\pi a^2.$$

Quesito 4. Risposta (D): aggiungere 1000/995 ml di soluto.
Dette s la quantità di soluto espressa in ml, S la quantità di solvente espressa in ml, e $T =$ totale della soluzione $= s + S = 250$ in ml, la concentrazione del prodotto è

$$c = \frac{s}{T} = \frac{0,1}{100} = \frac{1}{1000}.$$

Supponiamo di aggiungere una quantità di soluto pari a Δs: la nuova concentrazione diventa:

$$c' = \frac{s + \Delta s}{T + \Delta s}.$$

Imponendo che

$$c' = \frac{0,5}{100} = \frac{5}{1000},$$

troviamo:

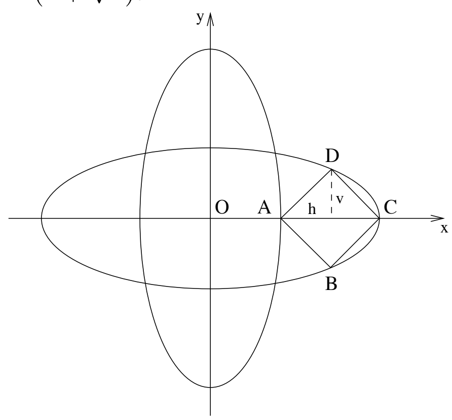
$$1000s + 1000\Delta s = 5T + 5\Delta s \text{ quindi } \Delta s = \frac{T(5 - 1000\frac{s}{T})}{995} = \frac{250 \cdot 4}{995} = \frac{1000}{995},$$

dunque una quantità superiore a 1 ml e inferiore a 2,5 ml.

Quesito 5. Risposta (B): 2 oppure 3 (ma non sappiamo il numero esatto).
Per prima cosa, Y non può essere un furfante: la sua affermazione "almeno uno di noi è un furfante" sarebbe vera. Quindi Y è un cavaliere. Se X e W fossero entrambi cavalieri, allora ci sarebbe esattamente un cavaliere, il che assurdo. Quindi tra X e W c'è un cavaliere, oppure nessun cavaliere: ma anche quest'ultima ipotesi è assurda, in quanto negando l'affermazione di X si ottiene che sarebbe vero che "nessuno tra X, Y, W, Z è cavaliere" (abbiamo appena visto che Y lo è). Quindi esattamente uno tra X e W è cavaliere e il numero totale di cavalieri è 2 o 3; questo impone che X sia cavaliere e W furfante.

A questo punto, se i cavalieri sono 3, abbiamo assodato che W è furfante, Y e Z sono entrambi cavalieri e tutte le affermazioni sono coerenti; se i cavalieri sono 2, allora ci sono due furfanti, W e Z, e le affermazioni sono nuovamente tutte coerenti. In conclusione, i cavalieri sono 2 o 3, ma non abbiamo sufficienti informazioni per decidere quale sia il valore corretto.

Quesito 6. Risposta (B): $a = (1 + \sqrt{2})b$.



Considerato un riferimento cartesiano con origine O nel centro dell'ellisse e assi come in figura, si ha $D = (b + h, v)$ per $h, v > 0$.

Se, per ipotesi, $ABCD$ è un quadrato, si ha $v = h = \frac{b-a}{2}$. D'altronde, la condizione che D appartenga all'ellisse si scrive:

$$\frac{(b+h)^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1 \iff \frac{\left(b + \frac{a-b}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\iff \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 = 4$$

e ponendo $x = \frac{a}{b}$ questa è equivalente a

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + (x-1)^2 = 4$$

$$\iff x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\iff (x^2 - 1)^2 - 2x(x^2 - 1) = 0$$

$$\iff (x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

che ha soluzioni:

$x = -1$ (da escludere perché $a, b > 0$)

$x = 1$ (da escludere perché corrispondente a $\ell = 0$)

$x = 1 - \sqrt{2}$ (da escludere perché $a, b > 0$)

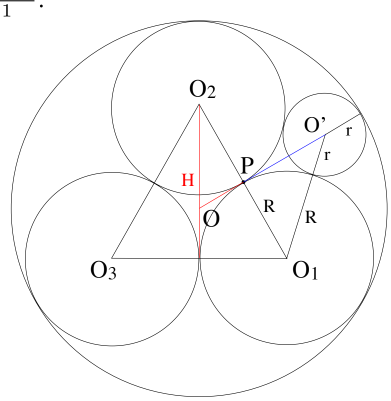
$x = 1 + \sqrt{2} \to a = (1 + \sqrt{2})b$.

Quesito 7. Risposta (B): 3.
Le cinque cifre di posto pari sono pari, pertanto le cifre di posto dispari sono dispari. L'ultima cifra è sicuramente 0 perché l'intera password è divisibile per 10, e di conseguenza la quinta cifra è 5. I numeri multipli di 4 la cui cifra delle decine è dispari terminano per 2 o 6, quindi la quarta e l'ottava cifra sono 2 o 6; la seconda e la sesta cifra sono quindi 4 e 8. La somma delle prime tre e delle prime sei cifre è multipla di 3, e quindi anche la somma delle seconde tre cifre è multipla di 3. La divisibilità di un numero per 8 dipende solo dalle ultime tre cifre, e se la cifra delle centinaia è 4 o 8, solo dalle ultime due, che devono dare un multiplo di 8. Queste informazioni lasciano le sole possibilità:

- 1472589630; 1836547290; 1896547230; 1896543270; 3816547290;
- 7412589630; 7896543210; 9816543270; 9816547230; 9876543210;

Di questi numeri, solo 3816547290 ha il numero formato dalle prime sette cifre divisibile per 7 ed è quindi necessariamente la password di Giulio.

Quesito 8. Risposta (D): $\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$.



Con riferimento alla figura, in cui si è posto $H =$ altezza del triangolo $O_1O_2O_3$, abbiamo

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2}(2R) = \sqrt{3}R, \tag{2}$$

$$1 = r + \sqrt{r^2 + 2rR} + \frac{H}{3}, \tag{3}$$

in quanto $O_1O_2O_3$ è equilatero per simmetria, mentre il raggio del cerchio più grande, di misura 1, è equivalente a $\overline{OP} + \overline{PO'} + r$ con PO' ortogonale a PO_1 (essendo OO' tangente ai cerchi intermedi di centri O_1, O_2) e dunque $\overline{PO'} = \sqrt{\overline{O_1O'}^2 - \overline{O_1P}^2} + \sqrt{(R+r)^2 - R^2} = \sqrt{2rR + r^2}$. Da (3) segue allora

$$r^2 + 2rR = \left(1 - r - \frac{H}{3}\right)^2,$$

$$\text{cioè} \qquad 2\left(R + 1 - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)r = \left(1 - \frac{H}{3}\right)^2,$$

e usando la (2):

$$2\left(R + 1 - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)r = \left(1 - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2$$

da cui, tenendo conto che si ricava facilmente $R = 2\sqrt{3} - 3$, con qualche calcolo si ottiene

$$r = \frac{2\sqrt{3} - 1}{11}.$$

Quesito 9. Risposta (C): 3 cinquine.

Il sistema è invariante per permutazioni cicliche delle incognite: se $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ è una soluzione del sistema, allora anche le cinquine $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_1), (x_3, x_4, x_5, x_1, x_2), (x_4, x_5, x_1, x_2, x_3)$ e $(x_5, x_1, x_2, x_3, x_4)$ sono soluzioni. Quindi, a meno di permutare ciclicamente i coefficienti di una soluzione $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, possiamo supporre che x_5 sia il coefficiente massimo. Ma allora $3x_5 = (x_2+x_3+x_4)^5 \leq (x_5+x_3+x_4)^5 = 3x_1$, poiché $x_2 \leq x_5$ insieme alla monotonia della quinta potenza nella disuguaglianza intermedia. Possiamo immediatamente concludere che $x_1 = x_5$. Una volta noto che $x_5 = x_1$, anche x_1 è massimo, e si dimostra che $x_1 = x_2$. Continuando, tutti i coefficienti di una soluzione sono uguali. Sapendo che le soluzioni reali cercate sono tutte del tipo (a, a, a, a, a), il sistema si risolve ora facilmente: da $(3a)^5 = 3a$ si ottiene subito $3a = 0, \pm 1$. Le tre soluzioni reali del sistema dato sono quindi $(0, 0, 0, 0, 0)$, $(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$, $(-1/3, -1/3, -1/3, -1/3, -1/3)$.

Quesito 10. Risposta (F): $2, 4, 6, 8$, quindi nessuna delle precedenti è corretta.

Il numero è $3/8$ e ha espansione finita in ogni base b tale che b^n sia multiplo di 8 per qualche $n > 0$, cioè in ogni base pari. Infatti, l'espansione di un numero in base b è finita se e solo se esistono numeri interi $x_1, \ldots, x_n$ tra 0 e $b-1$ compresi tali che $3/8 = x_1/b + x_2/b^2 + ... + x_n/b^n$. Ciò è equivalente a $3b^n = 8(x_n + x_{n-1}b + ... + x_n b^{n-1})$ e dunque 8 divide b^n. Viceversa, se 8 divide b^n, allora scriviamo $3b^n/8$ come $3b^n/8 = y_0 + y_1 b + ... + y_m b^m$, per opportuni interi $y_0, \ldots, y_m$ tra 0 e $b-1$; allora $3/8 = y_m/b^{n-m} + y_{m-1}/b^{n-m+1} + \ldots + y_0/b^n$, quindi $3/8$ ha espansione finita in base b. Ad esempio, in base 6, il numero si scrive $0,213_6$.

Quesito 11. Risposta (A): $\frac{25}{102}$.

Contiamo anzitutto il numero di estrazioni di due palline numerate con interi tra 0 e 100 la cui somma non superi 100, cioè le coppie di interi distinti tra 0 e 100, a meno dell'ordine, la cui somma non supera 100: ogni tale coppia corrisponde a una coppia ordinata del tipo (a, b), con a, b tra 0 e 100, $a < b$ e $a+b \leq 100$. In altre parole, dobbiamo contare coppie (a, b) in cui $0 \leq a \leq 49$, $a < b$ e $a + b \leq 100$. Per ogni valore a, il numero b può assumere tutti i valori di questa lista: $a+1$, $a+2$, $\ldots$, $100-a$: quindi c'è un numero pari di valori possibili per b, uguale a $100-2a$. Ad esempio: se $a = 0$, ci sono 100 valori per b; se $a = 1$, ci sono 98 valori per b; se $a = 49$, solo 2 valori per b. Considerando che a varia da 0 a 49 (la coppia $(50, 50)$ non è ammessa, e $(50, 51)$ non verifica la condizione $a + b \leq 100$), in totale vi sono tante coppie quante la somma dei pari da 2 a 100:

$$100 + 98 + 96 + \ldots + 2 = \sum_{a=1}^{50} 2a = 2\sum_{a=1}^{50} a = 2 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 50 \cdot 51.$$

Ora calcoliamo quante di queste coppie sono formate da entrambi numeri dispari: scelto $a = 2k-1$, con $1 \leq k \leq 25$, tra la lista dei $100-2a$ valori ammissibili per b, ce ne sono la metà che sono dispari, ovvero $50-a$. Ad esempio, per $a = 1$, i 49 numeri b della lista $3, 5, \ldots, 99$ vanno bene; per $a = 3$ i 47 dispari $5, 7, \ldots, 97$ vanno bene: quindi il numero delle coppie richieste è la somma dei dispari da 1 a 49:

$$\sum_{k=1}^{25}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{25} k - \sum_{k=1}^{25} 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 26 - 25 = 25^2.$$

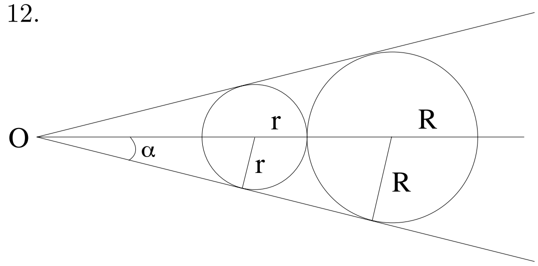
La probabilità cercata è dunque $\frac{25^2}{50 \cdot 51} = \frac{25}{102}$.

Quesito 12. Risposta (D): 65.

Il numero 1 è immediatamente perdente, così come ogni numero primo, al quale può seguire solo $1 - 1 = 0$. Sono vincenti per Alice invece i pari diversi da 2, poiché Alice può passare a Bob $2 - 1 = 1$, che è perdente; allo stesso modo sono vincenti i multipli di 3 diversi da 3, poiché Alice può passare a Bob $3 - 1 = 2$, che è perdente. Infine, è perdente ogni dispari non multiplo di 3: Alice può passare a Bob soltanto un divisore (che è dispari) al quale ha sottratto 1, quindi un pari diverso da 2 (poiché il numero non è multiplo di 3) e questi numeri sono vincenti per Bob.

Ricapitolando: i numeri per i quali Alice ha una strategia vincente sono i $50 - 1 = 49$, ovvero i pari escluso 2, e $33 - 1$ i multipli di 3 diversi da 3, ai quali dobbiamo sottrarre i 16 multipli di 6 che abbiamo contato due volte; in totale abbiamo $49 + 32 - 16 = 65$ numeri vincenti.

Quesito 13. Risposta: 12.



Consideriamo due biglie successive di raggi $r < R$ e centri a distanza $d < D$ dal vertice O del cono. Se α è l'angolo di apertura del cono si ha: $R = D\sin\alpha$, $r = d\sin\alpha$ e $D = d + r + R$, dunque

$$R = (d + r + R)\sin\alpha \Longrightarrow R = (d + r)\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\frac{d+r}{r} = \frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\left(1+\frac{d}{r}\right) = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

Questo mostra che il rapporto dei raggi di due biglie successive è una costante $c = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ dipendente solo dall'angolo di apertura α (e non dai raggi).

Allora, detti r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 i raggi delle 5 biglie, si deduce

$$\frac{r_5}{r_3} = \frac{r_5}{r_4}\frac{r_4}{r_3} = c^2 = \frac{r_3}{r_1},$$

da cui $r_3 = \sqrt{r_1 r_5} = \sqrt{18\cdot 8} = \sqrt{144} = 12$.

Quesito 14. Risposta: 24.
Siano x il numero di manifestanti che stringono la mano sia a un uomo che a una donna; y il numero di quelli che la stringono solo a uomini, e z il numero di quelli che le stringono solo a donne. Sappiamo che $y+x = 22$, $z+x = 30$ e che $x+y+z = 40$, da cui $x+(22-x)+(30-x) = 40$, cioè $x = 12$. Dunque $z = 30 - 12 = 18$ e $y = 22 - 12 = 10$. Contiamo facilmente $12 + 18\cdot 2 = 48$ mani di donne, e quindi 24 donne.

Quesito 15 Risposta: 105.
Si contino le configurazioni "sbagliate":
- quelle con 4 cifre rosse contigue: 12;
- quelle con 3 cifre rosse contigue: $12{\cdot}7$ (fissate le 3 rosse contigue ho $7 = (12-3)-2$ posti in cui mettere la quarta);
- quelle con 2 coppie di rosse contigue: $6\cdot 7$ (ci sono 12 modi di scegliere la prima coppia di rosse, e poi ancora 7 per scegliere la seconda coppia; ma tali configurazioni sono contate due volte);
- quelle con una sola coppia di rosse contigue: $12\cdot 21$ (si fissano in 12 modi possibili una coppia di rosse contigue; poi, messa una terza rossa quasi-contigua a una della coppia, cioè distanziata da essa da una sola cifra nera, ci sono 6 scelte per la quarta rossa; se invece la terza rossa è distaccata di almeno due cifre nere dalla coppia, ci sono 5 scelte per la quarta rossa: quindi $2\cdot 6 + (12-6)\cdot 5 = 42$ possibilità. Ma in questo modo ogni configurazione è contata esattamente due volte: quindi ci sono $12\cdot 21$ configurazioni).

In totale si hanno $(1 + 7 + 7/2 + 21)12 = 390$ configurazioni "sbagliate"; quindi le configurazioni possibili giuste sono $\binom{12}{4} - 390 = 495 - 390 = 105$.