

GARA INDIVIDUALE DI MATEMATICA

20 aprile 2018

Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze MM.FF.NN
Sapienza Università di Roma.

*I primi due quesiti devono essere consegnati entro la prima ora.
Nella valutazione sarà tenuto conto della chiarezza della risposta.*

Quesito 1. (8 punti – consegnare entro la prima ora)

In un piano cartesiano consideriamo due circonferenze C_1 e C_2 di raggio r e centri rispettivamente nei punti $C_1 = (-a,0)$ e $C_2 = (a,0)$, con $a > r$. Un segmento AB ha un estremo A sulla prima circonferenza, e l'altro estremo B sulla seconda circonferenza.

1a) Qual è il massimo coefficiente angolare che può avere la retta determinata da tale segmento?

1b) Qual è la lunghezza del segmento AB così determinato (cioè quello che corrisponde al coefficiente angolare massimo)?

Quesito 2. (9 punti – consegnare entro la prima ora)

Sulla lavagna ci sono 64 numeri. È possibile cancellarne una coppia qualsiasi, x ed y , e sostituire tale coppia con $\frac{x+y}{4}$. Ripetendo tale operazione un certo numero di volte, alla fine rimarrà un solo numero z sulla lavagna. Se i 64 numeri iniziali sono tutti uguali a 1, qual è il numero finale z più piccolo che si può ottenere tramite il procedimento sopra descritto?

Suggerimento: considerare i reciproci dei numeri che a ogni passo compaiono sulla lavagna.

Quesito 3. (10 punti)

Nel piano sono dati quattro punti. Si traccino gli assi di tutti i segmenti che hanno per estremi due dei punti dati: in quante parti, al massimo, queste rette dividono il piano?

Quesito 4. (11 punti)

Si dimostri o si confuti la seguente affermazione: fra 18 numeri consecutivi di tre cifre (di cui il primo è scelto arbitrariamente), ce n'è almeno uno che è divisibile per la somma delle sue cifre.