**PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA**

# GARA A SQUADRE 2018

**Dipartimenti di Matematica delle Università**
**Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre**

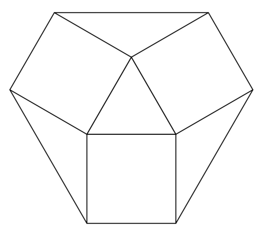
con il sostegno di:
UMI Unione Matematica Italiana  Progetto Lauree Scientifiche

**Quesito 1.** Nel marchesato di Carabas si può pagare con pezzi da 1, 3 o 5 soldi. In quanti modi differenti si può pagare l'ammontare di 15 soldi?

**(A)** 8
**(B)** 15
**(C)** 13
**(D)** 5
**(E)** 3
**(F)** nessuna delle precedenti

**Quesito 2.** Un esagono (non regolare) è costruito giustapponendo tre quadrati e tre triangoli isosceli intorno ad un triangolo equilatero di lato 2, come in figura. Qual è il perimetro dell'esagono?

**(A)** $6(1-\sqrt{3})$
**(B)** $6(1+2\sqrt{3})$
**(C)** $6(2+\sqrt{3})$
**(D)** $6(1+\sqrt{3})$
**(E)** $6(2-\sqrt{3})$
**(F)** $6(1-2\sqrt{3})$



**Quesito 3.** Quanti numeri interi $x$ soddisfano l'equazione $3^{\log_{10}(x^2)} = 2 \cdot 3^{\log_{10}(10x)} + 27$ ?

**(A)** non ne esistono
**(B)** 1
**(C)** 2
**(D)** 3
**(E)** 4
**(F)** più di 4

**Quesito 4.** Un treno percorre un tratto di strada a velocità costante. Se la velocità del treno aumenta del 12%, il tempo per percorrere lo stesso tratto diminuisce:

**(A)** meno del 10%
**(B)** di una percentuale compresa tra il 10% e l' 11%
**(C)** di una percentuale compresa tra l' 11% e il 12%
**(D)** esattamente del 12%
**(E)** di una percentuale compresa tra il 12% e il 13%
**(F)** più del 13%

**Quesito 5.** Consideriamo una scacchiera 101 x 101 (ossia costituita da $101^2$ caselle quadrate). Coloriamo di nero le caselle che costituiscono la cornice più esterna; quindi coloriamo di bianco la cornice di caselle adiacenti a quelle appena dipinte; poi coloriamo di nero la cornice più piccola di caselle adiacenti a quelle appena dipinite, e proseguiamo così alternando i colori bianco e nero. Alla fine, quante saranno in totale le caselle dipinte di nero?

**(A)** 5051
**(B)** 5097
**(C)** 5099
**(D)** 5101
**(E)** 5201
**(F)** 5205

**Quesito 6.** Sia $x$ un numero reale tale che $\dfrac{x(x+4)}{5} = \dfrac{12}{(x+1)(x+5)}$. Quanto vale $x(x+5)$ ?

**(A)** è inferiore a $-3$
**(B)** è superiore a $-3$ ed inferiore a $-1$
**(C)** è superiore a $-1$ ed inferiore a 1
**(D)** è superiore a 1 ed inferiore a 3
**(E)** è superiore a 3 ed inferiore a 5
**(F)** è superiore a 5

**Quesito 7.** Tagliamo un triangolo con due rette passanti per due vertici distinti: il triangolo risulta diviso in tre triangoli ed un quadrilatero. Allora:

**(A)** non è possibile che l'area del quadrilatero sia pari alla somma delle aree di due dei triangoli
**(B)** non è possibile che il quadrilatero ed il triangolo a lui opposto abbiano la stessa area
**(C)** non è possibile che i tre triangoli abbiano la stessa area
**(D)** non è possibile che i due triangoli tra loro opposti abbiano uguale area senza essere congruenti
**(E)** non è possibile che il quadrilatero e ciascuno dei triangoli a lui adiacenti abbiano stessa area
**(F)** le precedenti sono tutte configurazioni possibili.

**Quesito 8.** Su un'isola ci sono 21 camaleonti verdi, 19 marroni e 17 gialli. Quando due camaleonti di due colori diversi si incontrano, entrambi cambiano colore nel terzo. Allora,

**(A)** è impossibile che i camaleonti diventino tutti marroni
**(B)** è impossibile che i camaleonti diventino tutti marroni tranne uno
**(C)** è impossibile che i camaleonti diventino tutti marroni tranne due
**(D)** è impossibile che i camaleonti diventino tutti marroni tranne tre
**(E)** è impossibile che i camaleonti diventino tutti marroni tranne quattro
**(F)** tutte le precedenti sono configurazioni possibili

**Quesito 9.** Due dadi uguali hanno facce numerate da 1 a 6, ma sono truccati (dunque la probabilità che esca, per esempio, il 3 con il primo dado è uguale alla probabilità che esca il 3 con il secondo, ma questa probabilità non è necessariamente uguale a $\frac{1}{6}$). Si sa che la probabilità che, lanciando i due dadi, il prodotto dei numeri che escono sia pari è uguale a $\frac{16}{25}$. Allora la probabilità che la somma dei due numeri sia pari è:

**(A)** 2/5
**(B)** 13/25
**(C)** 1/2
**(D)** 3/5
**(E)** 12/25
**(F)** nessuna delle precedenti

**Quesito 10.** È vero che $2^{2018}$ è somma di $n$ numeri naturali consecutivi per

**(A)** $n = 3$
**(B)** $n = 5$
**(C)** $n = 11$
**(D)** $n = 1009$
**(E)** $n = 2^{1009} + 1$
**(F)** nessun $n > 1$

**Quesito 11.** La proiezione ortogonale su un piano orizzontale di un triangolo equilatero $T$ di lato 5 (cioè la sua ombra, quando il sole è allo zenit) è un triangolo $T_0$ avente due lati che misurano rispettivamente 3 e 4. Il terzo lato di $T_0$ vale:

**(A)** 2
**(B)** $2\sqrt{3}$
**(C)** $3\sqrt{2}$
**(D)** $2\sqrt{6}$
**(E)** 5
**(F)** nessuna delle precedenti

**Quesito 12.** Consideriamo la successione di numeri definita per ricorrenza $x_{n+1} = ax_n + b$, con $a$ e $b$ numeri reali ed $a$ diverso da 0 e 1. Sia $x_0$ il valore iniziale della successione, diverso dal valore $x^* = \frac{b}{1-a}$. La successione di numeri $x_n$, al crescere di $n$, si avvicina sempre di più a $x^*$, oscillando tra approssimazioni di $x^*$ per eccesso e per difetto, se:

**(A)** $a > 1$
**(B)** $0 < a < 1$
**(C)** $-1 < a < 0$
**(D)** $a < -1$
**(E)** $|a| < b$
**(F)** è impossibile che $x_n$ si avvicini sempre di più a $x^*$ al crescere di $n$

**Quesito 13.** Tizio, Caio, Sempronio, Pinco e Pallino parlano di un numero naturale $N$, ed ognuno fa due affermazioni, una sola delle quali è vera:
Tizio: *"N è multiplo di 3"; "N è multiplo di 5"*
Caio: *"N è un quadrato"; "N è il doppio di un quadrato"*
Sempronio: *"N è un divisore di 28"; "N è un divisore di 4200"*
Pinco: *"N è dispari"; "N è pari"*
Pallino: *"N ha meno cifre del suo doppio'; "Nessuna cifra di N divide N"*
Di che numero $N$ parlano?

**Quesito 14.** Del quadrilatero $ABCD$ sappiamo che $AB = BC = 10$, che $\widehat{ABC} = 100°$ e $\widehat{CDA} = 130°$. Quanto vale $BD$?

**Quesito 15.** Siano $a$,$b$,$c$ tre numeri reali tali che $a^2 = ab + 1$, $b^2 = bc + 1$, $c^2 = ac + 1$.
Quanto vale $2018 + abc(a + b + c)$ ?

Questo testo e le relative soluzioni sono disponibili alla pagina web: `www.mat.uniroma1.it/didattica/olimpiadi/`