PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA – SEZIONE DI ROMA

GARA A SQUADRE 2018

Dipartimenti di Matematica delle Università
Sapienza, Tor Vergata, Roma Tre

con il sostegno di:
UMI Unione Matematica Italiana Progetto Lauree Scientifiche

Soluzione 1. La risposta corretta è **(C)**.
Si possono elencare tutte le possibilità osservando che in un pagamento di 15 soldi, il numero di monete da 5 soldi è compreso tra 0 e 3. Se usiamo esattamente k monete da 5 soldi, rimangono da pagare $15-k$ soldi in monete da 1 e da 3; per questo ulteriore pagamento, il numero di monete da 3 soldi è compreso tra 0 e $(15-k)/3$, mentre il resto è composto da monete da 1 soldo.
I 13 possibili pagamenti sono allora i seguenti:

- $5+5+5$;
- $5+5+3+1+1$;
- $5+5+1+1+1+1+1$;
- $5+3+3+3+1$;
- $5+3+3+1+1+1+1$;
- $5+3+1+1+1+1+1+1+1$;
- $5+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$;
- $3+3+3+3+3$;
- $3+3+3+3+1+1+1$;
- $3+3+3+1+1+1+1+1+1$;
- $3+3+1+1+1+1+1+1+1+1+1$;
- $3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$;
- $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$.

Soluzione 2. La risposta corretta è la **(D)**.
I lati dei quadrati misurano anch'essi 2. L'angolo al vertice di ciascun triangolo isoscele vale $360°-60°-2\cdot 90° = 120°$. Il triangolo tagliato dalla bisettrice del triangolo isoscele è dunque metà di un triangolo equilatero di lato 1. Ogni triangolo isoscele ha dunque base uguale a $2\sqrt{3}$. La lunghezza del perimetro della figura vale pertanto $6(1+\sqrt{3})$.

Soluzione 3. La risposta corretta è **(B)**.
Se poniamo $y = \log_{10}(x)$, allora $\log_{10}(x^2) = 2y$ e l'equazione diventa $3^{2y} - 2\cdot 3^{y+1} - 27 = 0$, cioè

$$(3^y)^2 - 6\cdot(3^y) - 27 = 0.$$

Utilizzando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, si vede che 3^y può valere 9 oppure -3, ma essendo 3^y sempre positivo, solo $3^y = 9$ è accettabile, da cui $y = 2$. L'unica soluzione è quindi $x = 100$.

Soluzione 4. La risposta corretta è **(B)**.
Se il tempo necessario inizialmente era t, e la velocità passa da v a $v\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right) = \frac{28}{25}v$, il nuovo tempo di percorrenza è $\frac{25}{28}t = t\cdot\left(1-\frac{3}{28}\right)$. È ora immediato osservare che

$$\frac{10}{100} < \frac{3}{28} < \frac{11}{100}.$$

Soluzione 5. La risposta corretta è **(E)**.
La cornice più esterna è costituita da $4\cdot(101-2)+4 = 4\cdot 100 = 400$ caselle nere; quella immediatamente più interna da $4\cdot 98 = 392$ caselle bianche. In generale, la k-esima cornice possiede $8\cdot(51-k)$ caselle, tranne quella centrale che ne possiede una sola. In conclusione, le caselle nere saranno

$$8\cdot(50+48+46+\cdots+2)+1 = 16\cdot\frac{25\cdot 26}{2}+1 = 5201.$$

Soluzione 6. La risposta corretta è **(F)**.
L'equazione può essere riscritta come

$$x(x+5)(x+1)(x+4) = 60.$$

Osservando che $(x+1)(x+4) = x(x+5)+4$, si ottiene

$$(x(x+5))^2 + 4x(x+5) = 60.$$

Risolvendo, si ha $x(x+5) = 6$ oppure -10. Tuttavia l'equazione $x(x+5) = -10$ non ha soluzioni reali e si conclude che $x(x+5) = 6$.

Soluzione 7. La risposta corretta è **(C)**.
Sia ABC il triangolo, e siano E l'intersezione della retta condotta da B con il lato AC, ed F l'intersezione della retta condotta da C con il lato AB. Sia infine D l'intersezione di EB con FC. Se i triangoli DCB e DBF avessero stessa area, allora D deve essere il punto medio del segmento FC (in quanto, per entrambi i triangoli, l'altezza rispetto al lato che giace su EB è uguale alla distanza di B dalla retta FC) e dunque $FD = DC$. Analogamente $BD = DE$. Dunque $EFBC$ sarebbe un parallelogramma, avendo diagonali che si intersecano nel punto medio, ma ciò è assurdo in quanto le rette su cui giacciono EF e FB si incontrano in A per ipotesi.
La possibilità di tutte le altre configurazioni si verifica con degli esempi: se ABC è equilatero, una configurazione descritta in (A) o in (B) si ottiene prendendo E,F uguali ai piedi delle mediane da B, C; la configurazione (E) prendendo $AE = AF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}BF$. Per mostrare che anche la configurazione (D) è possibile, è sufficiente prendere un triangolo isoscele ABC rettangolo in C, ed F uguale al piede dell'altezza condotta da C: per continuità, esiste un $t = AE$ che rende l'area del triangolo EDC uguale a quella di FDB, e ciononostante FDB è un triangolo rettangolo, mentre EDC non lo è mai (eccetto che nei casi limite $t = 0$ e $t = AC$), pertanto i due triangoli non sono congruenti.

Soluzione 8. La risposta corretta è **(A)**.
Innanzitutto, dopo 17 incontri tra un camaleonte verde e uno giallo, vi saranno 53 camaleonti marroni e 4 verdi, quindi è possibile che i camaleonti diventino tutti marroni tranne 4.
Facendo incontrare ora un camaleonte marrone e uno verde, si avranno 52 camaleonti marroni, 3 verdi e 2 gialli; dopo due incontri tra camaleonti gialli e verdi, se ne avranno 56 marroni e 1 verde. È quindi anche possibile che i camaleonti diventino tutti marroni tranne uno.
Facendo adesso incontrare il camaleonte verde con uno dei marroni, otterremo 55 camaleonti marroni e 2 gialli. È allora possibile che i camaleonti siano tutti marroni tranne due. Se facciamo incontrare uno dei due camaleonti gialli con uno marrone ne avremo 54 marroni, uno giallo e due verdi, mostrando che è possibile averli tutti marroni tranne tre.
Rimane da mostrare che è impossibile che i camaleonti diventino tutti marroni. Quando si incontrano due camaleonti di due colori, la differenza tra il numero di camaleonti del primo colore e quelli del secondo rimane invariata, mentre la differenza tra il numero di camaleonti del terzo colore e quelli di uno dei primi due colori aumenta di 3. In particolare, se prima di un incontro nessuna di queste differenze è multipla di 3, sarà così anche dopo l'incontro. All'inizio, le differenze sono $2, 2, 4$, e quindi non accadrà mai che una delle differenze sia multipla di 3. In particolare, il numero di camaleonti gialli e verdi non potrà mai diventare 0.

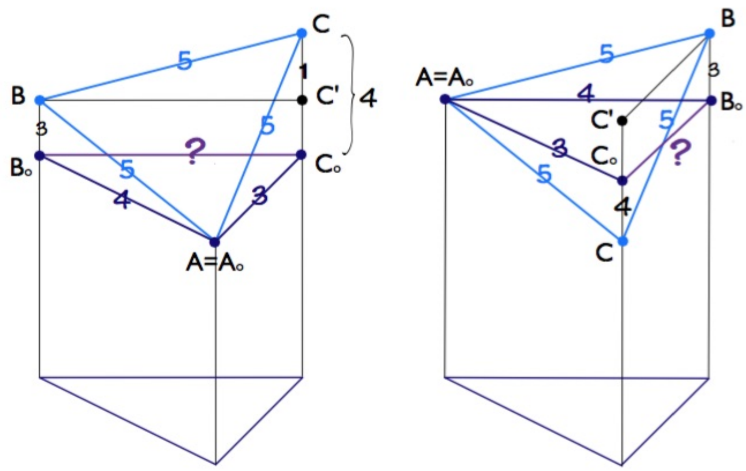
Soluzione 9. La risposta corretta è **(B)**.
La probabilità che, lanciando i due dadi, il prodotto dei numeri che escono sia dispari è $1-\frac{16}{25} = \frac{9}{25}$; poiché un prodotto di due numeri è dispari soltanto se entrambi i fattori sono dispari, la probabilità che lanciando un solo dado si ottenga un risultato dispari è $\frac{3}{5}$, e quella che si ottenga un risultato pari è $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. La somma dei numeri che escono lanciando due dadi è pari quando entrambi i dadi danno entrambi un numero pari o entrambi un numero dispari.
La probabilità è quindi $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{13}{25}$.

Soluzione 10. La risposta corretta è **(F)**.
Gli n naturali consecutivi da m a $m+n-1$ hanno per somma $n(2m+n-1)/2$. Questo numero coincide con 2^{2018} esattamente quando

$$n(2m+n-1) = 2^{2019}.$$

Se n è maggiore di 1, deve essere allora una potenza di 2; deve essere una potenza di 2 anche il fattore $2m+n-1 = n+(2m-1)$ che è somma di n e del numero dispari $2m-1$ ed è quindi in tal caso dispari. La sola possibilità è dunque che $n = 2^{2019}$ ed $2m+n-1 = 1$; ma la seconda equazione non è soddisfatta da alcun valore di $m \in \mathbb{N}$.

Soluzione 11. La risposta corretta è **(D)**.
Posizioniamo il triangolo proiezione T_0 orizzontalmente, per semplicità, chiamiamo A,B e C i vertici del triangolo equilatero T ed A_0,B_0,C_0 i vertici di T_0, proiezioni dei rispettivi punti. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $A = A_0$ e $A_0B_0 = 4$, $A_0C_0 = 3$ e che ci troviamo in una delle due configurazioni in figura:



Sia inoltre C' la proiezione ortogonale di B sulla retta verticale cui appartengono C e C_0.
Per il teorema di Pitagora abbiamo: $B_0B = \sqrt{5^2-4^2} = 3$ e analogamente $C_0C = \sqrt{5^2-3^2} = 4$. Notiamo che la seconda configurazione in figura (in cui A si trova ad un'altezza compresa tra l'altezza di C e quella di B) non è possibile, poiché si avrebbe il triangolo rettangolo $BC'C$ avrebbe l'ipotenusa di lunghezza inferiore a quella del cateto CC'. Poiché $C_0C > B_0B$, si ha dunque $CC' = CC_0 - C_0C' = CC_0 - B_0B' = 4-3 = 1$, e sempre dal teorema di Pitagora segue:

$$B_0C_0 = BC' = \sqrt{BC^2 - CC'^2} = \sqrt{5^2-1} = 2\sqrt{6}$$

Soluzione 12. La risposta corretta è **(C)**.
Si può riscrivere la ricorsione nella maniera seguente:

$$(x_{n+1} - x^*) = a(x_n - x^*),$$

il che mostra che le differenze tra i valori assunti dalla successione x_n e x^* si ottengono ciascuna dalla precedente moltiplicando per a; pertanto, oscillano avvicinandosi allo 0 quando a è negativo e $|a| < 1$.

Soluzione 13. La risposta corretta è: **50**.
L'affermazione di Pinco non ci dà alcuna informazione. Invece, poiché 28 è un divisore di 4200 e sappiamo che una delle due affermazioni di Sempronio è falsa, N deve essere senz'altro un divisore di 4200 (e non di 28). Dal momento che $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, se N fosse multiplo di 3, non sarebbe né un quadrato né il doppio di un quadrato, contraddicendo entrambe le affermazioni di Caio. Pertanto N è multiplo di 5. In tal caso, N può essere un quadrato o il doppio di un quadrato solo se $N = 25, 50, 100$ o 200. Poiché tutti questi numeri posseggono una cifra che li divide, N è l'unico di essi che ha meno cifre del suo doppio, e cioè $N = 50$.

Soluzione 14. La risposta corretta è: **10**.
Si prolunghi AB fino al punto E tale che $\widehat{AEC} = 50°$. In tal modo, $\widehat{AEC}$ risulta supplementare all'angolo $\widehat{CDA}$, dunque il quadrilatero $AECD$ è inscritto in una circonferenza $\mathcal{C}$. Inoltre, $\widehat{BCE} = 180° - 80° - 50° = 50° = \widehat{CEB}$, pertanto il triangolo EBC è isoscele con $EB = CB = AB$: ne segue che B è il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ e dunque che $BD = BA = 10$.

Soluzione 15. La risposta corretta è: **2017**.
Intanto, se $a = 0$, la prima identità non può essere soddisfatta, e analogamente per b e c utilizzando la seconda e la terza identità. I tre numeri sono quindi tutti diversi da 0, e possiamo dividere liberamente per essi.

Riscriviamo allora le tre identità come
$$a = b + \frac{1}{a}, \qquad b = c + \frac{1}{b}, \qquad c = a + \frac{1}{c}.$$
Sommando membro a membro, si ottiene che
$$\frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0,$$
e quindi $ab + bc + ca = 0$.

Moltiplicando le tre identità, si ha
$$(abc)^2 = (ab + 1)(bc + 1)(ca + 1) = (abc)^2 + abc(a + b + c) + (ab + bc + ca) + 1$$
e quindi $abc(a + b + c) = -1$, da cui $2018 + abc(a + b + c) = 2017$.

Per la cronaca, è possibile determinare i valori di a, b, c: sommando le tre identità si ottiene $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, da cui $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 3$. A meno di cambiare segno a tutti e tre i valori, possiamo supporre che $a + b + c = \sqrt{3}$ e quindi da $abc(a + b + c) = -1$ ottenere $abc = -1/\sqrt{3}$.

In conclusione,
$$a + b + c = \sqrt{3}, \qquad ab + bc + ca = 0, \qquad abc = -1/\sqrt{3},$$
e quindi a, b, c sono le radici — tutte e tre reali — del polinomio $x^3 - x^2\sqrt{3} + 1/\sqrt{3}$. Risolvendo, si ottiene:
$$a = \frac{1}{2\cos 50°}, \qquad b = \frac{1}{2\cos 170°}, \qquad c = \frac{1}{2\cos 290°},$$
a meno di permutazioni cicliche di a, b, c — e ovviamente di cambiamenti di segno di tutte e tre le quantità.