CONVESSITÀ

A CURA DEI DOCENTI, DOTTORANDI E STUDENTI DEL DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

1. Convessità e disuguaglianze

Le tecniche usate nella dimostrazione della disuguaglianza media aritmetica—media geometrica sono applicabili anche nello studio di particolari funzioni, dette *convesse*. Per le nostre finalità, va bene la seguente

Definizione 1.1. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa se

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

per ogni scelta di $x, y \in [a, b]$.

Per chi ha visto un po' di derivate, una maniera comoda di controllare la convessità di una funzione (sufficientemente differenziabile) è quella di verificare che la derivata seconda sia positiva — o meglio, non negativa — in ogni punto dell'intervallo.

La cosa interessante della disuguaglianza di convessità è che possiamo duplicare il numero di argomenti che vengono mediati esattamente come abbiamo fatto nella dimostrazione del paragrafo precedente. Ad esempio:

$$f\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)+f\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)\right),$$

e poiché

$$f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) \leq \frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}, \qquad f\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right) \leq \frac{f(a_3)+f(a_4)}{2},$$

allora

$$f\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{f(a_1)+f(a_2)}{2}+\frac{f(a_3)+f(a_4)}{2}\right) = \frac{f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+f(a_4)}{4}.$$

Teorema 1.2. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa, allora*

$$f\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1)+\ldots+f(a_n)}{n},$$

per ogni scelta di $a_1, \ldots, a_n \in [a, b]$.

Dimostrazione. Possiamo iterare il ragionamento precedente per dimostrare tale disuguaglianza quando n è una potenza di 2. Il caso generale di ottiene applicando la disuguaglianza ottenuta ai 2^k numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n, \bar{a}, \ldots, \bar{a}$, dove la media aritmetica $\bar{a}$ dei numeri $a_1, \ldots, a_n$ è ripetuta $2^k - n$ volte. □

Sono possibili anche raffinamenti di questo risultato, ad esempio

Corollario 1.3. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa, e $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Q}$ soddisfano $t_1 + \ldots + t_n = 1$, allora*

$$f(t_1a_1 + \ldots + t_na_n) \leq t_1f(a_1) + \ldots + t_nf(a_n),$$

per ogni scelta di $a_1, \ldots, a_n \in [a, b]$.

Dimostrazione. Dopo aver messo i razionali $t_1, \ldots, t_n$ a denominatore comune, possiamo supporre che

$$t_1 = \frac{m_1}{d},\ t_2 = \frac{m_2}{d}, \ldots\ t_n = \frac{m_n}{d},$$

dove $m_1, \ldots, m_n$ sono interi, e $d = m_1 + \ldots + m_n$. Basta allora applicare il Teorema **??** ai d numeri che si ottengono ripetendo m_1 volte a_1, m_2 volte a_2, ..., m_n volte a_n. □

Osservazione 1.4.

(1) Quando la funzione f è continua, possiamo passare al limite e supporre che $t_1, \ldots, t_n$ siano reali positivi, e non necessariamente razionali.
(2) Se f soddisfa la disuguaglianza opposta a quella convessità, allora la funzione $-f$ è convessa. In tal caso, tutte le affermazioni finora dimostrate continuano a valere, a patto di sostituire ad ogni $\leq$ un $\geq$.

2. Alcune applicazioni della convessità

Se $a_1, \ldots, a_n$ sono numeri reali (positivi), abbiamo visto che $(a_1 + \cdots + a_n)/n$ è la loro media aritmetica. La radice quadrata della media dei quadrati

$$\sqrt[2]{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

è invece detta media quadratica. Allo stesso modo, se $\alpha \in \mathbb{R}$, la quantità

$$m_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[\alpha]{\frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}}$$

è detta media α-esima, o media di potenza. Quando $\alpha = 1$ si ottiene la media aritmetica, per $\alpha = 2$ si ha la media quadratica; il caso $\alpha = 3$ produce la cosiddetta media cubica e $\alpha = -1$ fornisce la media armonica.

Proposizione 2.1. *Se $\alpha > 1$, allora $m_1(a_1, \ldots, a_n) \leq m_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$.*

Dimostrazione. La funzione $f(x) = x^\alpha$ è convessa in $[0, +\infty)$ (calcolatene la derivata seconda!). Per convessità, allora

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^\alpha \leq \frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}.$$

Prendendo la radice α-esima, si ottiene la disuguaglianza desiderata. □

Provate a mostrare che $m_\alpha(a_1, \ldots, a_n) \leq m_\beta(a_1, \ldots, a_n)$ non appena $\alpha < \beta$. Quando α tende a $+\infty$, la media α-esima tende al massimo tra $a_1, \ldots, a_n$. Quando α tende a $-\infty$, tende invece al minimo tra $a_1, \ldots, a_n$ — che, ricordiamo, abbiamo preso tutti positivi! Quando α tende a 0, m_α tende alla media geometrica (perché?).

Esercizi:

- Dimostrare per convessità la disuguaglianza media aritmetica — media geometrica. *[Sugg.: usare la convessità della funzione $-\log x$.]*
- (SNS 1986.5) Siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quattro angoli minori di $180°$. Si dimostri che

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta \leq 4 \sin\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{4}.$$

  Utilizzando la relazione precedente, si dimostri che la somma dei seni degli angoli interni di un triangolo è sempre minore o uguale a $3\sqrt{3}/2$.

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma – "La Sapienza"